FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICAS Y MATEMÁTICAS UNIVERSIDAD DE CHILE

MA1B2: Algebra lineal
Profesora : María Leonor Varas
Auxiliares : Sebastián Astroza, Diego Morán

Complementos Clase Auxiliar N°2

14 de Agosto de 2008

P1 Una matriz $U \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ se dice *unitaria* si $U^tU = I_n$.

a) Sea $U \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ una matriz unitaria. Pruebe que U es invertible y que su inversa, U^{-1} también es una matriz unitaria.

`Solución:` Veremos varias formas de resolver la parte complicada de este problema (la parte fácil queda propuesta!!!).

Usaremos gran parte de la materia que se verá en el resto del semestre, así que probablemente haya formas de solucionar el problema que, *de momento*, no entienda. Pero no se preocupe, en algunas semanas más Ud. se convertirá en un experto.

Forma 1: `Usaremos propiedades de sistemas lineales`

Probaremos que U^t es invertible. Para esto usaremos que

$$U^t \text{ es invertible} \Leftrightarrow \forall\ b,\ U^tx = b \text{ posee solución}$$

Sea $b \in \mathbb{R}^n$, queremos encontrar $x \in \mathbb{R}^n$ tal que $U^tx = b$.

Lo único que sabemos sobre U^t es que $U^tU = I$, así que en alguna parte debemos usarlo.

Observamos que si en la expresión U^tx en vez de x ponemos Uy obtenemos algo como $U^t(Uy)$ que es igual a $(U^tU)y$.
O sea hicimos aparecer U^tU!!! ¿Cómo lo ocupamos? Debemos poner un y tal que $U^t(Uy) = b$.

Como $U^tU = I$ no es difícil darse cuenta de que el y que nos sirve es $y = b$. En efecto,

$$U^t(Ub) = (U^tU)b = Ib = b$$

Luego, el sistema $U^tx = b$ tiene como solución a $x = Ub$.

Hemos probado que el sistema $U^tx = b$ tiene solución, sin importar el b que pongamos de lado derecho. Esto nos dice, usando una de las propiedades de la tutoría, que U^t es invertible.

Pero como además sabemos que $U^tU = I$, por unicidad de la inversa, se concluye que $(U^t)^{-1} = U$. Y por lo tanto se debe cumplir:

$$U^tU = UU^t = I$$

De donde se sigue que U es invertible.

Forma 2: `Usando la noción de` *`conjunto linealmente independiente y conjunto ortonormal.`*

Podemos estudiar cada coeficiente de la matriz U^tU. Si somos cuidadosos nos damos cuenta de que:

$$(U^tU)_{ij} = \langle U_{\bullet i}, U_{\bullet j}\rangle$$

Y como $U^tU = I$, podemos decir que:

$$\langle U_{\bullet i}, U_{\bullet j}\rangle = \delta_{ij}{}^1$$

Luego, el conjunto de las columnas de U, $\{U_{\bullet 1}, \ldots, U_{\bullet n}\}$, es un conjunto ortonormal, más aún, son n vectores *l.i.* en $\mathbb{R}^n$ y por lo tanto forman una base de $\mathbb{R}^n$. De lo anterior información que nos sirve para solucionar nuestro problema es que las columnas de U son l.i. y U es una matriz cuadrada pues con esto se puede decir que U es invertible.

Forma 3: `Ahora lo haremos usando` *`valores y vectores propios.`*
Sea λ es valor propio de U con vector propio asociado $v \in \mathbb{R}^n$. Recuerde que $v \neq 0$, por definición de vector propio. Además se tiene:

$$Uv = \lambda v$$

Podemos multiplicar por U^t y obtener:

$$U^tUv = \lambda U^t v$$

Y por la propiedad que cumple U, ie, $U^tU = I$

$$v = \lambda U^t v$$

Luego, λ no puede ser 0, pues $v \neq 0$.

Se concluye que cualquier valor propio λ de U no puede ser 0, en otras palabras, **todos** los valores propios de U son no nulos. Por lo tanto U debe ser invertible.

Forma 4: `Otra forma de ver que` U `es invertible es usar el determinante.`

$$det(U^tU) = det(I)$$

Usando propiedades del determinante llegamos a que lo anterior es lo mismo que

$$det(U^t)det(U) = 1$$

Lo que nos dice que $det(U) \neq 0$, pues de ser 0 la igualdad no se podría cumplir.

Conclusión, la matriz U es invertible, pues su determinante es no nulo.

Forma 5: `Usando primer semestre y` TNI^2.

Defina $\mathcal{U}(x) = Ux$ y $\mathcal{U}^t(x) = U^t x$, para todo $x \in \mathbb{R}^n$. Del enunciado se puede obtener entonces:

$$\mathcal{U}^t \circ \mathcal{U}(x) = id(x)$$

Luego, usando la materia del primer semestre se concluye que $\mathcal{U}$ debe ser *inyectiva.*

Ahora, usando un corolario del TNI se sigue que $\mathcal{U}$ debe ser también epiyectiva.

Así, $\mathcal{U}$ es invertible. Usando esto se puede escribir, al componer con $\circ\mathcal{U}^{-1}$:

$$\mathcal{U}^t \circ \mathcal{U} \circ \mathcal{U}^{-1} = id \circ \mathcal{U}^{-1}$$

Y ahora, componiendo con $\mathcal{U}\circ$ se obtiene:

$$\mathcal{U} \circ \mathcal{U}^t = id$$

[1]Donde $\delta_{ii} = 1$ y $\delta_{ij} = 0,\ i \neq j$
[2]Teorema Núcleo Imagen. El teorema más importante del semestre!!!

De donde,

$$\mathcal{U} \circ \mathcal{U}^t(x) = id(x)$$

es decir,

$$(UU^t)x = Ix$$

Así, $UU^t = I$[3].

Forma 6: `Usando segundo semestre y` TNI.

Veamos que $\mathbb{K}er(\mathcal{U}) := \mathcal{U}^{-1}(\{0\}) = \{0\}$.

En efecto,

$$0 \in \mathbb{K}er(\mathcal{U})$$

pues $\mathcal{U}(0) = U0 = 0$.

Por otro lado, si $x \in \mathbb{K}er(\mathcal{U})$ entonces $\mathcal{U}(x) = 0$, por definición de $\mathbb{K}er(\mathcal{U})$.

Podemos multiplicar esa igualdad por U^t obteniendo:

$$U^tUx = U^t0 \Rightarrow Ix = 0 \Rightarrow x = 0$$

Luego, el único elemento del $\mathbb{K}er(\mathcal{U})$ es el 0. De esto, podemos decir que $\mathcal{U}$ es inyectiva.

Finalmente, por TNI se concluye que $\mathcal{U}$ es también biyectiva y, haciendo lo mismo de antes se llega a que $UU^t = I$.

[3]En esta forma de solucionar el ejercicio se está usando implícitamente que para matrices A, B:

$$\forall\ x \in \mathbb{R}^n,\ Ax = Bx, \Leftrightarrow A = B$$

Probar esta afirmación es un buen ejercicio de matrices. Hágalo!!