MA1B2: Algebra lineal
Profesora : María Leonor Varas
Auxiliares : Sebastián Astroza, Diego Morán

Clase Auxiliar N°2

14 de Agosto de 2008

P1 Determine si existe una matriz $\mathcal{M} \in M_{2\times 2}(\mathbb{R})$ tal que para toda matriz $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in M_{2\times 2}(\mathbb{R})$ se cumpla

$$\mathcal{M} \cdot \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ a+c & d \end{bmatrix}$$

P2 Demuestre que si una matriz $A \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ verifica $A^2+A+I=0$, entonces A es una matriz invertible. ¿Se cumple la recíproca?.

P3 Se dice que una matriz cuadrada $A \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ es *idempotente* si $A^2 = A$. Sean $A, B \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$, matrices idempotentes. Probar que $A+B$ es idempotente $\Leftrightarrow AB = -BA$.

P4 Una matrix $U \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ se dice *unitaria* si $U^t U = I_n$.

a) Sea $U \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ una matriz unitaria. Pruebe que U es invertible y que su inversa, U^{-1} también es una matriz unitaria.

b) Sea $U_1, U_2 \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ matrices unitarias. Pruebe que U_1U_2 es una matriz unitaria.

c) Sea $u \in \mathbb{R}^n$ tal que $u^t u = 1$. Demuestre que la matriz $H = I_n - 2uu^t$ es unitaria.

d) Dado $\theta \in \mathbb{R}$, se define $G(\theta) = \begin{pmatrix} cos(\theta) & -sin(\theta) \\ sin(\theta) & cos(\theta) \end{pmatrix}$. Pruebe que $G(\theta)$ es una matriz unitaria. Además pruebe que para toda $A \in M_{2\times 2}(\mathbb{R})$ existe un $\theta \in \mathbb{R}$ tal que $(G(\theta)\cdot A)_{2,1} = 0$.

e) Sea $U \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ triangular superior y unitaria. Pruebe que U es diagonal y determine los valores en $\mathbb{R}$ que pueden tomar los coeficientes de la diagonal de U.

P5 Sean $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ y considere el siguiente sistema lineal de ecuaciones en las variables x_1, x_2, x_3

$$\begin{array}{ccccccc|} x_1 & + & 2x_2 & + & 3x_3 & = & 1 \\ 2x_1 & + & 3x_2 & + & 4x_3 & = & \beta \\ 3x_1 & + & 4x_2 & + & \alpha x_3 & = & 1 \\ \hline \end{array}$$

a) Determine los valores de α, β para los cuales el sistema tiene: `(i)` una única solución, `(ii)` ninguna solución y `(iii)` infinitas soluciones. Encuentre las soluciones en cada uno de los casos.

b) Para $\alpha = 4$ encuentre la inversa de la matriz de coeficientes del sistema lineal anterior.

Recuerditos de Sistemas Lineales Generales

- No hay solución cuando en la matriz escalonada $\widetilde{A}$ existe al menos una fila que tenga puros ceros y el coeficiente del lado derecho escalonado asociado sea $\widetilde{b}_i \neq 0$.
- Si el sistema tiene solución y la matriz escalonada posee al menos un peldaño de largo mayor o igual a 2 entonces hay infinitas soluciones.
- Si el sistema es *cuadrado* es equivalente decir que "todos los pivotes de la matriz escalonada son no nulos" y que "el sistema tenga solución única para cualquier lado derecho".