

Clase Auxiliar N°1 / Algebra Lineal / 07 Agosto 2008

Profesora: María Leonor Varas (Sección 5)
Auxiliares: Sebastián Astroza & Diego Morán

- P1** a) Demuestre que si A , B y $(A + B^{-1})$ son matrices invertibles, entonces $(A^{-1} + B)$ también es invertible y su inversa es $A(A + B^{-1})^{-1}B^{-1}$.
- b) Sea la matriz de n filas y m columnas triangular superior a coeficientes reales siguiente:

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & \ddots & & & \vdots \\ & & \ddots & 1 & 1 & 0 \\ 0 & \dots & & 0 & 1 & 1 \\ 0 & \dots & & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Sea $N = C - I$. Demuestre que $N^n = 0$.

- c) Demuestre que para las matrices C y N definidas en (b) se tiene que C es invertible y su inversa es $C^{-1} = I - N + N^2 - N^3 + \dots + (-1)^{n-1}N^{n-1}$.

- P2** Sea $M \in M_{m \times n}(\mathbb{R})$ una matriz tal que la matriz $(M^\top M) \in M_{m \times n}(\mathbb{R})$ es invertible. Definamos la matriz $P \in M_{m \times m}(\mathbb{R})$ como:

$$P = I_m - M(M^\top M)^{-1}M^\top$$

donde I_m es la matriz identidad de orden m .

- a) Pruebe que $P^2 = P$. Muestre que $PM = 0$, donde $0 \in M_{m \times n}(\mathbb{R})$ es la matriz nula.
- b) Pruebe que la matriz $(M^\top M)$ es simétrica y muestre que la matriz P es también secreta.
- c) Pruebe que P no es invertible.

- P3** Resuelva el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{array}{cccccc|c} x_1 & + & x_2 & + & x_3 & + & x_4 & = & 1 \\ & & x_2 & + & x_3 & & & = & 1 \\ -x_1 & - & x_2 & + & 2x_3 & & & = & 4 \\ x_1 & + & 3x_2 & + & 3x_3 & + & 2x_4 & = & 3 \end{array}$$

- P4** Sea $J \in M_{n,n}(\mathbb{R})$ tal que $J = \begin{pmatrix} 1 & \dots & 1 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \dots & 1 \end{pmatrix}$ y $e = \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$.

- a) Pruebe que $Je = ne$ y $J^2 = nJ$.
- b) Sea $\alpha \neq 1/n$. Calcule β tal que $(I - \alpha J)^{-1} = I + \beta J$.
- c) Sea $\alpha = 1/n$, verifique que $(I - \alpha J)e = 0$ y concluya que $I - \alpha J$ no es invertible.

Cosas sobre Matrices que podrían ser útiles...

- Una Matriz es un rectángulo con numeritos.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}, \quad a_{ij} \in K \quad \forall i = 1, \dots, m \quad \forall j = 1, \dots, n$$

- Se denota también $A = (a_{ij})$ y se dice que $A \in M_{m,n}(K)$.
- También se puede escribir:

$$A = (A_{\bullet 1} A_{\bullet 2} \dots A_{\bullet n}) \quad A = \begin{pmatrix} A_{1\bullet} \\ A_{2\bullet} \\ \vdots \\ A_{m\bullet} \end{pmatrix}$$

- Las Matrices se suman como usted se imagina.
- La multiplicación de Matrices es un poco más complicada. Si $A \in M_{m,r}(K)$ y $B \in M_{r,n}(K)$, se tiene que $C = AB \in M_{m,n}(K)$ es la matriz tal que:

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^r a_{ik} b_{kj} \quad \forall i = 1, \dots, m \quad \forall j = 1, \dots, n$$

- Forma práctica de verlo (hacer dibujito también):

$$AB = (A(B_{\bullet 1}) A(B_{\bullet 2}) \dots A(B_{\bullet n})) \quad AB = \begin{pmatrix} (A_{1\bullet})B \\ (A_{2\bullet})B \\ \vdots \\ (A_{m\bullet})B \end{pmatrix}$$

- Tenga Cuidado! En general $AB \neq BA$ (de hecho si $\exists AB$ **no** implica que $\exists BA$) .
- $(M_{nn}(K), +, \bullet)$ es un anillo con unidad.
- Hay divisores del cero.
- No necesariamente existe A^{-1} .
- Si A y B son invertibles **no** implica que $A + B$ es invertible.