Universidad de Chile
Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas
Departamento de Ingeniería Matemática

Problemas pendientes para el Control 3
18 de noviembre 2008

Profesor: Pablo Dartnell
Auxiliares: Roberto Castillo y Gonzalo Mena

1. **Sea** $v \in \mathbb{R}^n, v \neq 0$ **y** $T : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ **la aplicación lineal definida por** $T(x) = \langle v, x\rangle\, v$ **con** $\langle v, x\rangle = v^t x$

   a) **Pruebe que** $Im(T) = \langle\{v\}\rangle$ **y que** $Ker(T){=}\langle\{v\}\rangle^\perp$

   Dem: Sea $y \in Im(T) \iff y = \langle v, x\rangle\, v$ para cierto $x \in \mathbb{R}^n$. Notemos que $\langle v, x\rangle$ es un número real, luego $y = \langle v, x\rangle\, v$ es simplemente una ponderación del vector v por cierto escalar, en este caso, $\langle v, x\rangle$. Esto demuestra que $Im(T) \subset \langle\{v\}\rangle$. Para ver la otra inclusión, notemos que $Im(T)$ es siempre un s.e.v de $\mathbb{R}^n$. Como está incluido en el subespacio $\langle\{v\}\rangle$ tenemos sólo 2 opciones, $Im(T) = \{0\}$ o bien $Im(T) = \langle\{v\}\rangle$ (son los únicos espacios que están incluidos en $\langle\{v\}\rangle$, que es un espacio de dimensión 1). Sólo debemos entonces descartar que $Im(T) = \{0\}$. Pero esto último es muy fácil de verificar, basta tomar $x = v$,y obtenemos $T(x) = T(v) = \langle v, v\rangle\, v = ||v||^2 v$. Como $v \neq 0$ sigue que $||v||^2 \neq 0$ y por lo tanto $T(x = v) = ||v||^2 v \neq 0$. Luego $Im(T)$ no puede ser el singleton cero. Se concluye $Im(T) = \langle\{v\}\rangle$

   Para ver que $Ker(T){=}\langle\{v\}\rangle^\perp$ Notemos que $x \in Ker(T) \iff T(x) = 0 \iff \langle v, x\rangle\, v = 0 \iff \langle v, x\rangle = 0$ (pues $v \neq 0$). $\iff x \perp v \iff x \perp \lambda v\ \forall \lambda \in \mathbb{R}$

   Pero $x \in \langle\{v\}\rangle^\perp \iff x \perp u\ \forall u \in \langle\{v\}\rangle$. Como los elementos de $\langle\{v\}\rangle$ son justmente los u de la forma $u = \lambda v$ con $\lambda \in \mathbb{R}$ se tiene finamente
   $x \in \langle\{v\}\rangle^\perp \iff x \in Ker(T)$

   b) **Pruebe que** $dimKer(T) = n - 1$.

   Dem: Directo de que $\langle\{v\}\rangle \oplus \langle\{v\}\rangle^\perp = \mathbb{R}^n$ (esto se cumple para cualquier subespacio de $\mathbb{R}^n$). Como $dim\,\langle\{v\}\rangle = 1$ Por el TNI se tiene $dim\,\langle\{v\}\rangle^\perp = n - 1$. Pero $Ker(T){=}\langle\{v\}\rangle^\perp$, de donde se concluye .

   c) **Sea** $\{v_1, ...v_{n-1}\}$ **base de** $\langle\{v\}\rangle^\perp$**. Pruebe que** $\{v_1, ...v_{n-1}\}$ **son vectores propios asociados al valor propio 0**

   Dem: Notemos qu*e* $Tv_i = \langle v, v_i\rangle\, v\ \ (i \in \{1, ...n-1\})$, y como $v_i \in \langle\{v\}\rangle^\perp$ por definición se tiene $\langle v, v_i\rangle = 0$, luego $Tv_i = 0 = 0v_i$

   d) **Pruebe que** T **es diagonalizable. ¿Es T simétrica?**

   Dem: Debemos encontrar una base de vectores propios. Por la parte anterior ya tenemos $n - 1$ vectores propios l.i, asociados al valor propio 0. Debemos entonces buscar otro vector que sea l.i con los anteriores, asociado a algún otro valor propio. ¿Cuál es el otro valor propio? Encontrémoslo.
   $Tx = \lambda x \iff \langle v, x\rangle\, v = \lambda x$. Podemos "productopuntear"por $< \cdot, v >$ a ambos lados de la ecuación, obteniendo
   $\langle \langle v, x\rangle\, v, v\rangle = \langle \lambda x, v\rangle$
   $\langle v, x\rangle \langle v, v\rangle = \lambda \langle v, x\rangle$.
   $\langle v, x\rangle (||v||^2 - \lambda) = 0$
   Tenemos entonces 2 opciones. La primera es que $\langle v, x\rangle = 0$, pero como vimos antes en ese caso x es vector propio asociado al valor propio 0. La otra opción es que

$||v||^2 - \lambda = 0 \Leftrightarrow ||v||^2 = \lambda$. Es decir, $||v||^2$ es un valor propio de T . Debemos encontrar un vector propio asociado a ese valor propio que satisfaga las condiciones mencionadas.

Por la parte a vemos que el candiato perfecto es v ya que $T(v) = ||v||^2 v$. Además $\langle v, v_i \rangle = 0$ ya que los $v_i \in \langle \{v\} \rangle^{\perp}$. Luego $\{v_1, ...v_{n-1}, v\}$ son l.i pues los v_i lo eran y v es ortogonal a todos ellos. (demostrar que efectivamente son l.i). Tenemos entonces una base de vectores propios, los primeros n-1 asociados al valor propio 0 y el último al valor propio $||v||^2 \neq 0$. Se concluye que T es diagonalizable.

Para ver si es simétrica tenemos 2 opciones. La primera es notar que el teorema de diagonalización de matrices simétricas nos dice que una matriz es simétrica ssi existe una base ortonormal de vectores propios. En este caso particular existe tal base, basta elegir una nueva base $\{v'_1, ...v'_{n-1}\}$ de $\langle \{v\} \rangle^{\perp}$**,** esta vez elegida con los vectores ortonormales (se podría hacer Gramm Schmidt). Podemos definir $v' = \dfrac{v}{||v||}$y se tiene que este vector es ortogonal con $\{v'_1, ...v'_{n-1}\}$ y tiene norma 1. Luego $\{v'_1, ...v'_{n-1}, v'\}$ es base ortonormal de vectores propios.

Otra forma de hacerlo es usar que una matriz es simétrica$(A = A^t) \iff \forall x, y \in \mathbb{R}^n \quad \langle Ax, y \rangle = \langle x, Ay \rangle$ (demuéstrenlo!)

Aunque T no está expresado como matriz, del capítulo de matriz representante sabemos que admite una representación matricial única con respecto a la base canónica. Entonces podemos trabajar con la caracterización anterior suponiendo que T es una matriz.

Tenemos $\langle Tx, y \rangle = \langle \langle v, x \rangle v, y \rangle = \langle v, x \rangle \langle v, y \rangle = \langle x, v \rangle \langle v, y \rangle = \langle x, \langle v, y \rangle v \rangle = \langle x, Ty \rangle$ Luego T es simétrica

2. **Sean** $v_1, ...v_k \in \mathbb{R}^n$ **ortogonales y de norma 1, sean** $\alpha_{1,...}, \alpha_k \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$**, y** $A = \alpha_1 v_1 \overset{t}{v_1} + ...\alpha_k v_k v_k^t \in M_{nn}(\mathbb{R})$.**Pruebe que**

   a) $\quad Im(A) = \langle \{v_1, ...v_k\} \rangle$, $Ker(A) = \langle \{v_1, ...v_k\} \rangle^{\perp}$

   *Dem:*Notemos que $Ax = \alpha_1 v_1 \overset{t}{v_1} x + ...\alpha_k v_k v_k^t x = \alpha_1 \langle v_1, x \rangle v_1 + ...\alpha_k \langle v_k, x \rangle v_k = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i \langle v_i, x \rangle v_i$

   Notemos primero que $A^t = (\alpha_1 v_1 v_1^t + ...\alpha_k v_k v_k^t)^t = A$

   Probemos en primer lugar que $Ker(A) = \langle \{v_1, ...v_k\} \rangle^{\perp}$ (sugerencia de Leonardo Sepúlveda)

   Sea $x \in KerA \iff Ax = 0 \iff \sum_{i=1}^{k} \alpha_i \langle v_i, x \rangle v_i = 0$. Como los v_i son ortonormales, en particular son l.i. lo que implica $(\Longrightarrow) \alpha_i \langle v_i, x \rangle = 0 \ \forall i = 1...k$

   Como los a_i son no nulos $\iff \langle v_i, x \rangle = 0 \ \ \forall i = 1...k$

   Entonces para cualquier combinación lineal de los v_i, digamos $w = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i v_i$ se tiene $\langle w, x \rangle = \left\langle \sum_{i=1}^{k} \lambda_i v_i, x \right\rangle = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i \langle vi, x \rangle = 0$

   Luego, $\forall w \in \langle \{v_1, ...v_k\} \rangle$, se cumple $\langle x, w \rangle = 0$ lo que quiere decir exactamente que $x \in \langle \{v_1, ...v_k\} \rangle^{\perp}$

   Tenemos entonces $Ker(A) \subset \langle \{v_1, ...v_k\} \rangle^{\perp}$

   Para ver la otra implicancia sea $x \in \langle \{v_1, ...v_k\} \rangle^{\perp}$ en particular se tiene $\langle x, v_i \rangle = 0 \ \forall i = 1...k$ Luego $Ax = 0$ i.e $x \in Ker(A)$

   Por lo tanto $Ker(A) = \langle \{v_1, ...v_k\} \rangle^{\perp}$

   Veamos ahora la otra igualdad. No lo haremos directamente. En vez de eso demostraremos que $Im(A) = Ker(A)^{\perp}$

Demostremos $Im(A) \subset Ker(A)^{\perp}$. Sea $y \in Im(A)$, luego $y = Ax_0$ para cierto x_0.Sea $x \in Ker(A)$. Entonces $\langle y, x\rangle = \langle Ax_0, x\rangle \overset{A^t=A}{=} \langle x_0, Ax\rangle \overset{x\in Ker(A)}{=} \langle x_0, 0\rangle = 0$

Luego $y \perp x$ $\forall x \in Ker(A)$ es decir $y \in Ker(A)^{\perp}$. Hemos probado la primera inclusión

Para la inclusión opuesta usamos un argumento dimensional. Sabemos que $\dim \langle\{v_1, ...v_k\}\rangle = k, \dim \langle\{v_1, ...v_k\}\rangle^{\perp} = n - k$

Además por el teorema de núcleo imagen, $\dim Ker(A) + \dim \mathrm{Im}(A) = n$ como $Ker(A) = \langle\{v_1, ...v_k\}\rangle^{\perp}$ $\dim Ker(A) = n - k$

Sigue que $\dim \mathrm{Im}(A) = k$ Pero $Im(A) \subset Ker(A)^{\perp} = \langle\{v_1, ...v_k\}\rangle$. Es decir, $\mathrm{Im}(A)$, que tiene dimensión k , está además contenido en un espacio vectorial de dimensión k.Necesariamente entonces $Im(A) = Ker(A)^{\perp}$

3. . **Sean**$R, S{\in}M_{nn}(\mathbb{R})$, **con**$S$**invertible**.**Considere**$A = RS$**y**$B = SR$.

   a) **Pruebe que** $v \in \mathbb{R}^n$ **es vector propio de** A **asociado al valor propio**$\lambda \in \mathbb{R}$ **ssi** Sv **es vector propio de** B **asociado al mismo valor propio** λ.**Concluya que** A **y** B **tienen los mismos valores propios.**

      Dem: Si v es vector propio de A asociado al valor propio λ entonces $Av = \lambda v$. Podemos remultiplicar por S a ambos lados para obtener

      $SAv = \lambda Sv$. Como $A = RS$ obtenemos $(SR)Sv = \lambda Sv \Leftrightarrow B(Sv) = \lambda(Sv)$. Tenemos entonces que Sv s vector propio de B asociado al valor propio λ.(Notar que por ser S invertible $Sv \neq 0$). Análogamente, si $B(Sv) = \lambda(Sv)$ premultiplicamos por S^{-1} y obtenemos $S^{-1}B(Sv) = \lambda v \Leftrightarrow S^{-1}SRSv = \lambda v \iff Av = RSv = \lambda v$ (Notar que se podría haber demostrado directamente la equivalencia)

   b) **Sean** $W_\lambda(A) = Ker(A - \lambda I)$ $W_\lambda(B) = Ker(B - \lambda I)$ **los subespacios propios de** A **y** B **(respectivamente) asociados al valor propio** $\lambda \in \mathbb{R}$ **Pruebe que** $dim(W_\lambda(A)) = dim(W_\lambda(B))$.

      Dem: Veamos algunas propiedades de los conjuntos $W_\lambda(A)$, $W_\lambda(B)$

      $x \in W_\lambda(A) \iff Ax = \lambda x \overset{(a)}{\Leftrightarrow} B(Sx) = \lambda(Sx) \iff Sx \in Ker(B - \lambda I) \iff Sx \in W_\lambda(B) \iff x \in S^{-1}(W_\lambda(B))$ Donde $S^{-1}(W_\lambda(B))$ es la preimagen de $W_\lambda(B)$ asociada a la transformación S (recordar que cada matriz define una transformación y vice versa)

      Tenemos entonces $S^{-1}(W_\lambda(B)) = W_\lambda(A)$ componiendo a ambos lados con S y usando que S es invertible tenemos $W_\lambda(B) = S(W_\lambda(A))$

      Con esta relación podemos concluir. Sea $\{v_1, ...v_k\}$ base de $W_\lambda(A)$. Como S es invertible $\{Sv_1, ...Sv_k\}$ es base de $S(W_\lambda(A)) = W_\lambda(B)$, obviamente ambas tienen el mismo cardinal. Luego las dimensiones son iguales.

   c) **Pruebe que** A **es diagonalizable ssi** B **es diagonalizable.**

      Dem: Por la parte anterior tenemos que las multiplicidades geométricas coinciden para cada valor propio. Si probamos que las multiplicidades algebraicas coinciden la equivalencia será obvia (porque en tal caso será todo "simétrico"para A y B)

      Probaremos algo más fuerte, que tienen el mismo polinomio característico. En efecto:

      $|A - \lambda I| = |RS - \lambda I| = |(R - \lambda S^{-1})S| = |S||R - \lambda S^{-1}| = |SR - \lambda SS^{-1}| = |SR - \lambda I| = |B - \lambda I|$

      Vemos que los pasos claves usan la invertibilidad de S y que el determinante del producto es el producto de los determinantes (no olvidar!!)