Auxiliar 11 - MA2A1
21 de octubre 2008

Profesor: Pablo Dartnell
Auxiliares: Roberto Castillo y Gonzalo Mena

1. En esta pregunta veremos algunas propiedades del rango
 - a) Demuestre que $r(AB) \leq \min\{r(A), r(B)\}$ donde $A \in M_{n \times m}$, $B \in M_{m \times p}$
 - b) Demuestre que si P, Q son matrices invertibles, $P \in M_{n \times n}$, $Q \in M_{m \times m}$ y A como en la parte anterior, entonces $r(A) = r(PAQ)$. Concluya que si A y B son semejantes (es decir, existen P, Q tales que $B = PAQ$, con $A \in M_{n \times m}$, $P \in M_{n \times n}$, $Q \in M_{m \times m}$ entonces tienen el mismo rango
 - c) Demuestre que $A \in M_{n \times m}$ es de rango 1 si y sólo si $A = uv^t$ para ciertos $u \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$, $v \in \mathbb{R}^m \setminus \{0\}$
2. Este problema es una generalización de la última parte del anterior. El objetivo es demostrar que la parte 1c) es válida aún si el rango es mayor que 1 (cambiando las propiedades que tendrán las ahora matrices u y v).
 - a) Demuestre que si una matriz $A \in M_{n \times m}$ tiene $r(A) = r$, entonces es posible extraer de ella una submatriz $B \in M_{r \times r}$ invertible. Nota: Se entiende como una submatriz de una matriz A dada, a cualquier matriz formada por la intersección de filas y columnas de A .
 - b) Demuestre que si a una matriz $A \in M_{n \times m}$ se le puede extraer una submatriz $B \in M_{r \times r}$ invertible, entonces $r(A) \geq r$
 - c) Concluya que una matriz $A \in M_{n \times m}$ tiene $r(A) = r$ sí y sólo si se puede extraer de ella una submatriz $B \in M_{r \times r}$ invertible, y cualquier otra $C \in M_{q \times q}$ submatriz invertible de A cumple $q \leq r$
 - d) Demuestre el siguiente teorema de descomposición de matrices:

$A \in M_{n \times m}$ tiene $r(A) = r \Leftrightarrow A = PQ^t$ para ciertos $P \in M_{n \times r}$, $Q \in M_{m \times r}$, ambos de rango r

3. Sean $A, B \in M_{n \times n}$ a coeficientes reales tales que $AB = BA$
 - a) Pruebe que si $Bv \neq 0$ y v es vector propio de A asociado a λ entonces Bv también lo es
 - b) Muestre que si v es un vector propio de A perteneciente a un espacio propio de dimensión 1, entonces v es también vector propio de B
 - c) Pruebe que si $A, B \in M_{n \times n}$ con A invertible (no necesariamente conmutan) entonces $P(AB) = P(BA)$, donde $P(\bullet)$ denota el polinomio característico
 - d) Determine los valores y vectores propios de la matriz $Q = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 \\ -2 & 1 & -6 \\ 1 & -1 & 4 \end{pmatrix}$