**Universidad de Chile**
**Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas**
**Departamento de Ingeniería Matemática**

**Auxiliar 9 - MA1B2**
**7 de octubre 2008**

Profesor: Pablo Dartnell
Auxiliares: Roberto Castillo y Gonzalo Mena

1. *a*) Sea $T : U \longrightarrow V$ lineal inyectiva y $\{u_1, ...., u_n\}$ base de U. Demuestre que $\{T(u_1), ...., T(u_n)\}$ Es base de $Im(T)$

   *b*) Sea $U$ un e.v. y $T : U \longrightarrow U$ una transformación lineal. Demuestre que $T \circ T = 0 \Leftrightarrow Im(T) \subseteq Ker(T)$

   *c*) . Encuentre todas las transformaciones lineales $T : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ tales que $Ker(T) = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle$ y $Im(T) = Ker(T)$

   *d*) Sea $T : M_{33}(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}$ La función que a cada matriz $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$ le asocia $T(A) = a_{11} + a_{22} + a_{33}$.
   Pruebe que T es lineal, encuentre Ker T, Im T y sus respectivas dimensiones. ¿Es T inyectiva?.¿Es T sobreyectiva?

2. Denotemos por $Pk$ el espacio vectorial de los polinomios con coeficientes reales de grado menor o igual que $k$.

   *a*) Sea $L : P2 \longrightarrow P4$ definida por $L(p(x)) = p(x)(x^2 + 1)$. Muestre que $L$ es lineal

   *b*) Encuentre una base y dimensión de $ker(L)$e $Im(L)$

   *c*) En adelante $V = Im(L)$.Pruebe que $P1 \cap V = \{0\}$.

   *d*) Calcule $dim(P1 \oplus V)$ y deduzca que $P1 \oplus V = P4$.

3. Sean $V, W$ e.v sobre $\mathbb{R}$. En $V \times W$ se definen la suma y la ponderación por escalar de la manera obvia:

$$\begin{aligned} (v, w) + (v', w') \quad &: \quad = (v + v', w + w') \forall v \in V, \forall w \in W \\ \lambda(v, w) \quad &: \quad = (\lambda v, \lambda w) \ \forall \lambda \in \mathbb{R}, \forall v \in V, \forall w \in W \end{aligned}$$

   De esa manera $V \times W$ resulta ser también e.v sobre $\mathbb{R}$ (no demostrar)

   Dada una función $f : V \longrightarrow W$ se define su gráfico por

$$G_f = \{(v, w) \in VxW : w = f(v)\}$$

   *a*) Pruebe que f es lineal sí y sólo si $G_f$ es subespacio vectorial de $VxW$

   *b*) Pruebe que $\{0_v\} \times W$ es subespacio vectorial de $V \times W$

   *c*) Sea $f : V \longrightarrow W$ lineal. Pruebe que $G_f \oplus (\{0_v\}xW) = V \times W$