CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL

Aux Extra, Miércoles 21 de Noviembre

Problema 1. Calcule el radio de convergencia de la serie de potencias:

(i) $\sum_{n\geq 0} \frac{(-3)^n}{\sqrt{n+1}} x^n$ Analice la convergencia en los extremos

(ii) $\sum_{n\geq 0} \frac{(n!)^k}{(kn)!} x^n, \quad k \in \mathbb{N} \setminus 0$

(iii) $\sum_{n\geq 2} \frac{x^n}{n\ln(n)}$

Problema 2. A partir de la serie conocida de la función e^{-x} encontrar una representación en serie de potencia para $f(x) = x^2 e^{-x^3}$, y calcule $\int_0^1 x^2 e^{-x^3} dx$ para probar:

$$\sum_{n\geq 0} \frac{(-1)^n}{(n+1)!} = 1 - 1/e$$

Problema 3. Considere la función $f(x) = \sum_{n\geq 1} \frac{x^n}{n(n+1)}$

(i) Calcular el radio de conv. de $f(x)$

(ii) Demostrar que $\forall x \in (-R, R)$ se tiene:

$$[xf(x)]'' = \frac{1}{1-x}$$

(iii) Demostrar que $\forall x \in (-R, R) \setminus 0$ se tiene que:

$$f(x) = \frac{1 + (1-x)(\ln(1-x) - 1)}{x}$$

Problema 4. Analice la convergencia de:

$$\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n} \left(\frac{x}{1-x}\right)^n$$

y calcule su valor.

Problema 5.

(a) Deducir que:

$$\operatorname{arc\,tg}(x) = \sum_{n\geq 1} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$$

y concluir una serie que permita calcular π.

(b) Deducir que $\frac{1}{(1-x)^3} = \sum_{n\geq 0} \frac{(n+2)(n+1)x^n}{2}$

(c) Calcular el área bajo la curva de $f(x) = \sum_{n\geq 1} \frac{\sin(nx)}{n^2}$ entre 0 y π.