CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL

Problema 0. Se llama astroide a la curva que admite la ecuación:

$$x^{3/2} + y^{3/2} = a^{3/2}$$

ó paramétricamente:

$$x = a\cos^3(t); \;\; y = a\sin^3(t), \quad t \in [0, 2\pi]$$

Hallar la longitud del astroide.
HINT: Demuestre que si S es el arco de la curva que tiene ecuaciones paramétricas $y = \varphi(t)$, $x = \psi(t)$, donde $t \in [\alpha, \beta]$, donde φ, ψ son funciones de clase C^1, entonces:

$$S = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{\varphi'(t)^2 + \psi'(t)^2} dt$$

Problema 1. Considere la curva Γ parametrizada por:

$$\vec{\sigma}(t) = (t\cos(t),\, t\sin(t),\, t) \quad t \in \mathbb{R}$$

(i) Demuestre que la curva se mueve sobre el manto del cono $z^2 = x^2 + y^2$.
(ii) Demuestre que el ángulo que forma la recta tangente con el eje z es constante.
(iii) Demuestre que el vector normal en cualquier punto de la curva es perpendicular al eje z.
(iiii) Demuestre que el ángulo que forma el vector binormal con el eje z es constante.
(iiiii) Calcule la curvatura y torsión de Γ.
(iiiiii) Compruebe que el cuociente entre estas cantidades permanece constante. (Esta curva recibe el nombre de *hélice cónica*).

Problema 2. Dadas las curvas $y = mx$; $y = x^2$, considere la región limitada por ambas curvas y encuentre el valor de $m > 0$, para que los volumenes de los sólidos obtenidos al rotar la región definida en torno al eje OX y al eje OY, sean iguales.

Problema 3. Sea Γ el grafo de una función diferenciable f.

$$grafo(f) = \big\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \; y = f(x)\big\}$$

(a) Determine una fórmula para la longitud de Γ
(b) Suponiendo f dos veces diferenciabl, pruebe que la curvatura en el punto $(x, f(x))$ viene dada por:

$$\kappa(x) = \frac{|f''(x)|}{|1 + f'(x)^2|^{2/3}}$$

(c) ¿Que sucede ahora si $f : [a, b] \times [c, d] \to \mathbb{R}$?. Determine una fórmula para la superficie del grafo de f, si f es diferenciable (como función de $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$).

Problema 4. Calcule la longitud de las curvas descritas por las siguientes parametrizaciones:

(i) $\vec{\sigma}(t) = (\cos^4(t), \sin^4(t)) \quad t \in [0, 2\pi]$
(ii) $\vec{\sigma}(t) = (\cosh^2(t), \sinh^2(t)) \quad t \in [0, 1]$
(iii) $\vec{\sigma}(t) = (\cosh(t), \sinh(t), t) \quad t \in [0, 1]$

Problema 5. Considere una curva $\Gamma \subset \mathbb{R}^3$ con la siguiente propiedad: existe un punto P_0 por el cual pasan todas las rectas normales a Γ (Note que la circunferencia cumple esta propiedad). Sea $\vec{r}(s) : [0, l(\Gamma)] \to \mathbb{R}$ una parametrización en longitud de arco de Γ.

(i) Justifique la existencia de una función $\varphi[0, l(\Gamma)] \to \mathbb{R}$ tal que:

$$P_0 = \vec{r}(s) + \varphi(s)\vec{N}(s)$$

(ii) Demuestre que se cumple:

$$\begin{aligned} 1 - \varphi(s)\kappa(s) &= 0 \\ \varphi'(s) &= 0 \\ \tau(s)\phi(s) &= 0 \end{aligned}$$

Donde $\kappa(s), \tau(s)$ denotan la curvatura y torsión de Γ respectivamente.

(iii) Concluya que Γ es una curva plana.

(iv) Demuestre finalmente que Γ es un arco de circunferencia.