

CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL

AUX 4, VIERNES 29 DE AGOSTO

Problema 0. Sean $a_1, a_2, \dots, a_N \in \mathbb{R}$ tales que $a_i > 0, \forall i$. Suponga además que:

$$f(x) = a_1^x + a_2^x + \dots + a_N^x \geq N, \forall x \in \mathbb{R}$$

Demuestre que f tiene un mínimo global, y pruebe que:

$$a_1 \cdot a_2 \cdot \dots \cdot a_N = 1$$

Problema 1.

- (a) Sean $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ funciones crecientes y derivables de signo constante: $g' < 0$ y $h' > 0$. Dadas las constantes $a, b, c > 0$, estudie la monotonía de:

$$f(x) = g(b - ax^3)h(\operatorname{Arctg}(cx))$$

- (b) Usando el TVM, demuestre que:

$$1 + \ln x < (x + 1) \ln(x + 1) - x \ln x < 1 + \ln(x + 1), \quad \forall x > 0$$

Deduzca que:

$$n \ln n - (n - 1) \leq \ln 1 + \ln 2 + \dots + \ln n < (n + 1) \ln(n + 1) - n, \quad \forall n \geq 1$$

Problema 2.

- (a) $y = f(x)$ está definida implícitamente por $x^2 + xy + y^2 - 3 = 0$. Demuestre que el punto $P(1, -2)$ es un mínimo local de f . (Requiere convexidad!!)
- (b) Verifique que la derivada de $f(x) = \arcsin(2x - 1) + 2 \arctan \sqrt{(1 - x)/x}$ es nula en $[0, 1]$.

Problema 3. Dados $a, b > 0$, estudie el crecimiento de la función $f(x) = (a^x + b^x)^{1/x}$ en el intervalo $(0, +\infty)$

Problema 4. Sean $0 < a < b$. Sea $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, continua en $[a, b]$, derivable en (a, b) , con $f(a) = f(b) = 0$ y $f'(a) = 0$. Demuestre que existe $c \in (a, b)$ de modo que la tangente a f en el punto c pasa por el origen. Analice que pasa si $a = 0$

Problema 5. Determine el mayor volumen de un cilindro de radio r y altura h , donde $P = (h, r)$ recorre la recta de ecuación: $L : ay + bx = ab, a, b > 0$.

ESTUDIO DE FUNCIONES

Problema 0. Estudie completamente la siguiente función:

$$f(x) = \left(1 - \frac{1}{x} + \frac{2}{x^2}\right)e^{1/x}$$

para ello prosiga como sigue.

- i. Analice el Dominio de f y su signo.
- ii. Estudie la existencia de asíntotas.
- iii. Calcule f' y estudie el crecimiento de f . Analice la existencia de mínimos y máximos.
- iv. Calcule f'' y estudie la convexidad de f . Analice puntos de inflexión.
- v. Bosqueje f .

Problema 1. Estudie completamente la siguiente función:

$$f(x) = x + 1 - \frac{2}{x} - \frac{3 \ln(x)}{x}$$

para ello prosiga como sigue.

- i. Analice el Dominio de f y encuentre un cero por inspección.
- ii. Estudie la existencia de asíntotas.
- iii. Calcule f' y estudie el crecimiento de f . Analice la existencia de mínimos y máximos.
- iv. Calcule f'' y estudie la convexidad de f . Analice puntos de inflexión.
- v. Bosqueje f .

Problema 2. Considere la función f definida en $(-1, \infty)$ por:

$$f(x) = \frac{2x}{1+x} - \ln(1+x)$$

- i. Calcule f' y estudie el crecimiento de f . Analice la existencia de mínimos y máximos.
- ii. Calcule f'' y estudie la convexidad de f . Analice puntos de inflexión.
- iii. Calcular $l = \lim_{x \rightarrow -1^+} f(x)$ y $L = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.
- iv. Demostrar que la ecuación $f(x) = 0$ tiene exactamente dos soluciones.