

CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL

AUX 2, AGOSTO 2008

Problema 1. Sean $f, g : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ funciones continuas y epiyectivas. Demuestre que existe $c \in [0, 1]$ tal que: $f(c) = g(c)$

Problema 2. Sea $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ continua, tal que $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) \geq |x|$. La idea del problema es demostrar que f tiene un mínimo global.

O sea:

$$\exists a \in \mathbb{R} \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad f(a) \leq f(x)$$

Para esto, proceda como sigue:

- (a) Sea $I = [-f(0), f(0)]$. Demuestre que $\forall x \in \mathbb{R} \setminus I, f(x) > f(0)$
- (b) Concluya que f tiene un mínimo global (en todo $\mathbb{R}$).

Problema 3. Sea $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ continua. Sea (a_n) una sucesión en $[a, b]$, no necesariamente convergente, tal que $\lim_{n \rightarrow \infty} f(a_n) = l$. Demuestre que existe $\bar{x} \in [a, b]$ tal que $l = f(\bar{x})$

Problema 4. Sea $h : \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R}$ que satisface:

$$h(x \cdot y) = h(x) + h(y)$$

Muestre que si h es continua en $x = 1$, entonces h es continua en todo su dominio. Concluya que $h(x) = \log_a(x)$, con $a = h(1)$

Problema 5. Demuestre que toda función continua de $[0, 1]$ en $[0, 1]$ tiene al menos un punto fijo.

Problema 6. Un conductor demora 5 horas en recorrer los (aproximadamente) 500 kms. que separan Santiago y Concepción. Pruebe que existe un tramo del viaje, de una longitud de 100 kms., que es recorrido en exactamente 1 hora.

Problema 7. Considere:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x \log(x)}{x-1} & \text{si } x > 0, x \neq 1 \\ \alpha & x = 1 \end{cases}$$

- (a) Encuentre α para que f sea continua.
- (b) Analice la existencia de $f'(x)$ ($x > 0$). Calculela.
- (c) Determine la continuidad de f' en $(0, \infty)$
- (d) Asuma que $f^{(n)}$ existe para $n \geq 2$ y que es continua en 1. Calcule una recurrencia para $f^{(n)}(1)$ utilizando la fórmula de Leibnitz para $(x-1)f(x)$
- (e) Encuentre el Taylor de orden 3 para f entorno a 1.