# Auxiliar #1 MA12A

Miguel Angel Carrasco.

## 1 Resumen

### 1.1 Derivadas

La expresión

$$\lim_{x_1 \to x_0} \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}$$

o bien

$$\lim_{x_1 \to x_0} \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}$$

se conoce como derivada de $f$ en $x_0$ y en este caso representa la pendiente de la recta tangente a la curva $y = f(x)$ en el punto $P$. (" es el límite cuando $Q$ tiende a $P$" en la Figura 1)

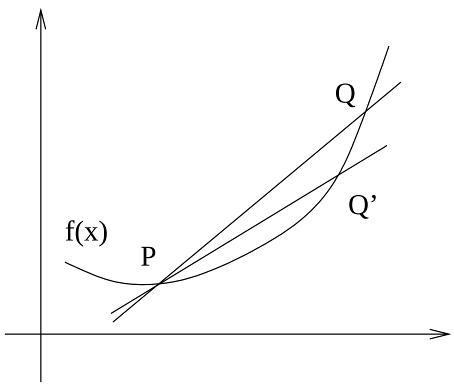


Figura 1: secante que une los puntos $P$ y $Q$

### 1.2 Función derivada

Sea $f\colon A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ y $x_0 \in \mathrm{Int}(A)$ diremos que $f$ es derivable o diferenciable en $x_0$ si y sólo si el siguiente límite:

$$\lim_{x_1 \to x_0} \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}$$

existe y se notará $f'(x_0)$. tambien si llamamos $h = x_1 - x_0$ entonces

$$\lim_{x_1 \to x_0} \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

La función que asocia $x \to f'(x)$ se llama función derivada.

Si $y = f(x)$ la derivada (si existe) se anota:

$$f'(x), \quad y', \quad \frac{dy}{dx}(\text{de } y \text{ a de } x), \quad \frac{df(x)}{dx}.$$

**Teorema 1.1** *Si $f$ es diferenciable en $x_0$ entonces $f$ es continua en $x_0$*

## 2 Problemas

P1. Calcular por definición la derivada de la siguiente función:

$$f(x) = \frac{2+x}{3-x}$$

P2. Sea $g$ una función continua en $a$ y $f(x) = (x-a)g(x)$, calcular $f'(a)$.

P3. Sean $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ que cumplen lo siguiente:

1. $g(x) = xf(x) + 1$ y $\lim_{x\to 0} f(x) = 1$.
2. $g(a+b) = g(a)g(b)$.

Demuestre que $g'(x) = g(x)$.

P4. Probar que

$$f(x) = \begin{cases} x\,\mathrm{sen}(\frac{1}{x}) & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

no tiene derivada en 0, pero

$$g(x) = \begin{cases} x^2\,\mathrm{sen}(\frac{1}{x}) & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

si tiene.

## 3 Soluciones

P1. Calcular por definición la derivada de la siguiente función:

$$f(x) = \frac{2+x}{3-x}$$

Sol:

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{\frac{2+(x+h)}{3-(x+h)} - \frac{2+x}{3-x}}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{(2+x+h)(3-x)-(2+x)(3-x-h)}{h(3-x-h)(3-x)} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{(6+3x+3h-2x-x^2-hx)+(-6+2x+2h-3x+x^2+xh)}{h(3-x-h)(3-x)} \\
\text{finalmente} \qquad f'(x) &= \lim_{h\to 0} \frac{5h}{h(3-x-h)(3-x)} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{5}{(3-x+h)(3-x)} \\
f'(x) &= \frac{5}{(3-x)^2}
\end{aligned}$$

P2 Sea $g$ una función continua en $a$ y $f(x) = (x-a)g(x)$, calcular $f'(a)$.

Sol:

$$\begin{aligned}
f'(a) &= \lim_{h\to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{(a+h-a)g(a+h)-0}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{hg(a+h)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} g(a+h) \\
&= g(a) \qquad \text{pues } g \text{ es continua en } a
\end{aligned}$$

$$\therefore \quad f'(a) = g(a).$$

P3. Sean $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ que cumplen lo siguiente:

1. $g(x) = xf(x) + 1$ y $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 1$.
2. $g(a+b) = g(a)g(b)$.

Demuestre que $g'(x) = g(x)$.

Sol:

$$\begin{aligned} g'(x) &= \lim_{h\to 0} \frac{g(x+h) - g(x)}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{g(x)g(h) - g(x)}{h} \\ &= g(x) \lim_{h\to 0} \frac{g(h) - 1}{h} \end{aligned}$$

pero $\frac{g(h)-1}{h} = f(h)$, por lo tanto

$$\lim_{h\to 0} \frac{g(h) - 1}{h} = \lim_{h\to 0} f(h) = 1$$

$$\Rightarrow g'(x) = g(x).$$

P4. Probar que

$$f(x) = \begin{cases} x \operatorname{sen}(\frac{1}{x}) & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

no tiene derivada en 0, pero

$$g(x) = \begin{cases} x^2 \operatorname{sen}(\frac{1}{x}) & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

si tiene.

Sol:

$$\begin{aligned} f'(0) &= \lim_{h\to 0} \frac{h \operatorname{sen}(\frac{1}{h}) - 0}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \operatorname{sen}(\frac{1}{h}) \quad \nexists \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} g'(0) &= \lim_{h\to 0} \frac{h^2 \operatorname{sen}(\frac{1}{h}) - 0}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} h \operatorname{sen}(\frac{1}{h}) = 0 \end{aligned}$$