Auxiliar N°3: MA1A2 Cálculo Diferencial e Integral

Profesor: Leonardo Sanchez
Auxiliares: Gonzalo Contador - Germán Ibarra

21 de Agosto de 2008

Problema 1.-

(a) Sean $0 < a < b$. Sea f definida y continua sobre $[a, b]$ y derivable sobre (a, b). Suponga que $f(a) = f(b) = 0$ y que $f'(0) = 0$. Mostrar que existe $c \in (a, b)$ de modo que la tangente a f en el punto c pasa por el origen. Analice que pasa si $a = 0$

(b) Sea f continua en $[0, \infty)$ diferenciable en $(0, \infty)$ y tal que $f(0) = 0$ y f' es creciente en $\mathbb{R}$

(i) Use el teorema del valor medio para probar que $f'(x) > \frac{f(x)}{x}$ en $\mathbb{R}^+$

(ii) Deduzca que la función $g(x) = \frac{f(x)}{x}$ es creciente en $\mathbb{R}^+$

Problema 2.-

(a) Calcule las derivadas de las funciones $\arctan(x)$ y $\arccos(x)$.

(b) Demostrar usando el teorema del valor medio generalizado que $\forall x \in (0, 1)$

$$1 < \frac{\arctan(x)}{\frac{\pi}{2} - \arccos(x)} < \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$$

Problema 3.- Se traza una recta desde el punto $(0, a)$ hasta el eje horizontal, y desde ahi, una recta hasta el punto $(1, b)$. Demostrar que la longitud total minima se da cuando los angulos α y β son iguales

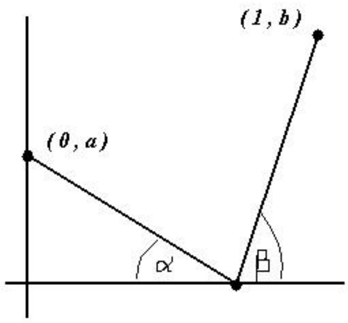

Figura 1: Angulos α y β

Problema 4.- Sea desean determinar las dimesiones óptimas a, x, y que minimicen la superficie de una caja de leche, donde a, x e y corresponden al fondo, ancho y alto respectivamente (sin considerar los pliegues), para un volumen total de V

(a) Encuentre una expresión para la superficie en terminos de x y a

(b) Tomando a como parametro conocido, demuestre que el valor $x = x(a)$ que minimiza dicha superficie es

$$x = \sqrt{\frac{V}{a}}$$

Justifique que se trata de un minimo

(b) Usando lo anterior, encontrar una expresión $S(a)$ para la superficie solamente en función de a y determine el valor minimo de esta función, justificando porque es minimo. Explicitar los valores de a, x e y