Auxiliar N°2: MA1A2 Cálculo Diferencial e Integral

Profesor: Leonardo Sanchez
Auxiliares: Gonzalo Contador - Germán Ibarra

14 de Agosto de 2008

Problema 1.- Sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ una función continua en $[a, b]$.

(i) Pruebe que existen $\alpha, \beta \in [a, b]$ tales que

$$f(\alpha) \leq \frac{f(x_1) + f(x_2)}{2} \leq f(\beta), \forall x_1, x_2 \in [a, b]$$

(ii) Demuestre que dados $x_1, x_2 \in [a, b]$ cualquiera, existe $\delta \in [a, b]$, tal que:

$$f(\delta) = \frac{f(x_1) + f(x_2)}{2}$$

Problema 2.- Sea f una funciòn continua en $[a, b]$ y $x \in \mathbb{R}$

(i) Demostrar que existe un punto en la gráfica ded f que es, entre todos, el más próximo a $(x, 0)$

(ii) Demostrar que esta misma afirmación no es necesariamente cierta si $[a, b]$ se sustituye por (a, b)

(iii) Demostrar que la afrmación se cumple si $[a, b]$ se sutituye por $\mathbb{R}$

(iv) En los casos de (i) y (iii), sea $g(x)$ la minima distancia de $(x, 0)$ a un punto de la gráfica de f. Demostrar que

$$g(y) \leq g(x) + |x - y|$$

y deducir que g es continua

(v) Demuestre que existe valores x_0 y x_1 en $[a, b]$ tales que la distancia de $(x_0, 0)$ a $(x_1, f(x_1))$ es menor o igual a la $(x_0', 0)$ a $(x_1', f(x_1'))$, $\forall x_0', x_1'$

Problema 3.-

(a) Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función dos veces derivable con f'' continua y $f(0) = 0$. Se define la función

$$g(x) = \begin{cases} \frac{f(x)}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ f'(0) & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

(i) Demuestre que g es continua y derivable en $\mathbb{R}$

(ii) Demuestre que g' es continua en $\mathbb{R}$

(b) Considere la función $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por

$$g(x) = \begin{cases} \frac{\arctan(x)}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

Demustre que $g(x) \in C^1$