Auxiliar 14 Series

Profesor: Jorge San Martin
Auxiliares: Ramiro Villagra
Orlando Letelier

Criterios de Convergencia mas usados

1. Mayoracion de Series

   Sean 2 sucesiones de modo que que $a_n \leq \alpha b_n$ para algun α (fijo) a partir de $n > n_0$.
   Si $\sum b_k$ converge $\Rightarrow \sum a_k$ converge.

2. Comparacion por cuociente:

   Sean dos sucesiones positivas tales que $c = \lim \frac{a_n}{b_n}$ exite:

   a) Caso $c = 0$. Si $\sum b_k < \infty \Rightarrow \sum a_k < \infty$
   b) Caso $c > 0$. $\sum b_k < \infty \Leftrightarrow \sum a_k < \infty$

3. Criterio del cuociente:

   Sea $a_n > 0$ tal que $r = \lim \frac{a_{n+1}}{a_n}$ exite:

   a) Caso $r < 1 \Rightarrow \sum a_k$ converge.
   b) Caso $r > 1 \vee r = \infty \Rightarrow \sum a_k$ converge.
   a) Caso $r = 1$ no se puede determinar.

4. Criterio de la raiz n-esima

   Sea $a_n > 0$ tal que $r = \lim \sqrt{a_n}$ exite:

   a) Caso $r < 1 \Rightarrow \sum a_k$ converge.
   b) Caso $r > 1 \vee r = \infty \Rightarrow \sum a_k$ converge.
   a) Caso $r = 1$ no se puede determinar.

5. Criterio de la integral impropia:

   Sea $f : [1, \infty) \to \Re^+$, decreciente, se tiene que :

$$\sum f(n) < \infty \Leftrightarrow \int_1^\infty f(x)dx < \infty$$

6. Criterio de Leibnitz:

   Sea a_n decreciente y convergente a 0, entonces $\sum (-1)^n a_n$ es convergente.

P1.

a) Analice la convergencia de la siguiente serie, en caso de ser convergente, calcule su valor:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+1(k+2)}$$

Indicacion: Utilice la identidad $\frac{1}{k(k+1)(k+2)} = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{2k} - \frac{1}{k+1} + \frac{1}{2(k+2)}\right]$

b) Use el criterio de la Integral para analizar la convergencia de la integral.$\int_1^\infty \frac{e^x}{x^x}$
c) Analice la convergencia absoluta y condicional de la serie $\sum_1^\infty (-1)^k \frac{2k+1}{k(k+1)}$

Solucion

a) Utilizamos el criterio de la integral, perimero verificamos que la funcion $f = \frac{1}{x(x+1)(x+2)}$ sea decreciente y convergente a cero.

$$f'(x) = \frac{-1}{(x(x+1)(x+2))^2} < 0$$

$$\lim f(x) = \lim \frac{1}{x(x+1)(x+2)} = 0$$

Ahora podemos analizar la entegral

$$\int_1^\infty \frac{1}{x(x+1)(x+2)} = \int_1^\infty \frac{1}{2}\left[\frac{1}{2x} - \frac{1}{x+1} + \frac{1}{2(x+2)}\right] = \frac{1}{2}\left[\int_1^\infty \frac{1}{2x} - \int_1^\infty \frac{1}{x+1} + \int_1^\infty \frac{1}{2(x+2)}\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}\ln(x) - \ln(x+1) + \frac{1}{2}\ln(x+2)\right]_1^{s\to\infty} = \frac{1}{4}\left[\ln(x) - \ln((x+1)^2) + \ln(x+2)\right]_1^{s\to\infty}$$

$$= \frac{1}{4}\left[\ln\left(\frac{x(x+2)}{(x+1)^2}\right)\right]_1^{s\to\infty} = 0 - \frac{1}{4}\ln(\frac{3}{4})$$

$$\Rightarrow \int_1^\infty \frac{1}{x(x+1)(x+2)} = -\frac{1}{4}\ln(\frac{3}{4})$$

Como la integral converge, entonces converge la serie.

b) Primero debemos verificar que f este definida en $[1,\infty)$ y que sea decreciente. Lo primero se tiene claramente, comprobemos que es decreciente.

$$y = \frac{e^x}{x^x}$$

$$x^x \cdot y = e^x / ln()$$

$$\ln(x^x \cdot y) = \ln(e^x)$$

$$\ln(x^x) + \ln(y) = x$$

$$x\ln(x)+\ln(y)=x/\frac{d}{dx}$$

$$\ln(x)+x\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\cdot y'=1$$

$$y'=-\ln(x)\cdot y=-\ln(x)\frac{e^x}{x^x}<0$$

Dado que f esta bien definida y es decreciente podemos utilizar el criterio de la Integral impropia y analizamos $\sum\frac{e^n}{n^n}$ con el criterio de la raiz n-esima.

$$r=\lim\sqrt[n]{\frac{e^n}{n^n}}=\lim\frac{e}{n}=0$$

Como $r<1\Rightarrow\sum\frac{e^n}{n^n}$converge$\Rightarrow\int_1^\infty\frac{e^x}{x^x}$ converge.

c) Analizamos primerio la convergencia absoluta (en valor absoluto) de la serie:

$$\sum_1^\infty\left|(-1)^k\frac{2k+1}{k(k+1)}\right|=\sum_1^\infty\frac{2k+1}{k(k+1)}=\sum_1^\infty\frac{1}{k}+\frac{1}{k+1}$$

Utilizamos el criterio de la comparacion por cuociente, elegimos $b_k=\frac{1}{k}$

$$c=\lim\frac{a_n}{b_n}=c=\lim\frac{\frac{1}{k}+\frac{1}{k+1}}{\frac{1}{k}}=\lim\frac{k}{k}+\frac{k}{k+1}=2$$

Como $c>0$ y $\sum b_k$ diverge, entonces $\sum\frac{2k+1}{k(k+1)}$ tambien diverge

Ahora analizamos la convergencia de la serie (sin valor absoluto). Primero notamos que $\frac{2k+1}{k(k+1)}$ es decreciente y converge a cero, en efecto:

$$\begin{aligned}\frac{a_{n+1}}{a_n} &= \frac{\frac{2(k+1)+1}{(k+1)(k+2)}}{\frac{2k+1}{k(k+1)}}=\frac{k(2(k+1)+1)}{(k+2)(2k+1)}=\frac{k(2k+3)}{(k+2)(2k+1)}\\ &< \frac{k(2k+4)}{(k+2)(2k+1)}=\frac{2k(k+2)}{(k+2)(2k+1)}=\frac{2k}{(2k+1)}<1\end{aligned}$$

$$\lim\frac{2k+1}{k(k+1)}=0$$

Gracias al criterio de Leibnitz podemos concluir que $\sum(-1)^n\frac{2k+1}{k(k+1)}$ es convergente. Ya que la serie converge, pero no covnerge absolutamente decimos que es condicionalmente convergente.

P2.

a) Demuestre que para todo numero real p, la serie $\sum\frac{e^{pn}}{n!}$ converge.

b) Estudie la convergencia de la serie $\sum\frac{(1+\frac{10}{n})^{n^2}}{n!}$.

Considere la funcion:

$$f(x)=\frac{\pi}{2}-\arctan(x),x\geq 0$$

c)demuestre que la serie $\sum a_n$ de termino $a_n = (-1)^n f(n)$ converge.

d)Calcule $\lim_{x\to\infty} xf(x)$ y utilice este resultado pra demostrar que la serie definida en (c) no converge absolutamente.

Solucion

a) Podemos analizarla con el criterio de raiz n-esima:

$$r = \lim \sqrt[n]{\frac{e^{pn}}{n!}} = \lim \frac{e^p}{\sqrt[n]{n!}} = 0$$

tambien se puede analizar por el criterio del cuociente:

$$r = \lim \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim \frac{\frac{e^{p(n+1)}}{n+1!}}{\frac{e^{pn}}{n!}} = \lim \frac{e^p}{n+1} = 0$$

En ambos casos como $r < 1$ significa que la serie en estudio converge $\forall p$.

b) Este caso lo analizaremos con el criterio de la raiz n-esima:

$$r = \lim \sqrt[n]{\frac{(1+\frac{10}{n})^{n^2}}{n!}} = \lim \frac{(1+\frac{10}{n})^{n^2\cdot\frac{1}{n}}}{\sqrt[n]{n!}} = \lim (1+\frac{10}{n})^n \cdot \lim \frac{1}{\sqrt[n]{n!}} = e^{10}\cdot 0 = 0$$

Como $r < 1$ significa que la serie converge.

c) Veamos que $f(n)$ sea decreciente y convergente a 0.

$$f'(x) = -\frac{1}{1+x^2} < 0$$

$$\lim f(n) = \lim \frac{\pi}{2} - \arctan(n) = \frac{\pi}{2} - \lim \arctan(n) = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2} = 0$$

Utilizando el criterio de Leibnitz podemos concluir que $\sum(-1)^n f(n)$ es convergente.

d) Calculamos primero:

$$\lim_{x\to\infty} xf(x) = \lim_{x\to\infty} x\left(\frac{\pi}{2} - \arctan(x)\right) = \lim \frac{(\frac{\pi}{2} - \arctan(x))}{\frac{1}{x}}$$

Tiene forma $\frac{0}{0}$ asi que podemos utilizar L'hoppital.

$$\lim \frac{\left(-\frac{1}{1+x^2}\right)}{\frac{-1}{x^2}} = \lim \frac{x^2}{1+x^2} = 1$$

.

Analizamos ahora la convergencia absoluta de la serie $\Rightarrow \sum f(n)$, el calculo anterior sugiere que debemos ocupar el criterio de comparacion por cuociente, eligiendo $b_n = \frac{1}{n}$

$$c = \lim \frac{f(x)}{\frac{1}{x}} = \lim x f(x) = 1$$

Como $c > 0$ y $\sum b_n$ diverge, entonces $\sum f(n)$ diverge, luego $\sum (-1)^n f(n)$ no converge absolutamente.

P3. Estudie la convergencia de las siguientes series:

a) $\sum \left(\frac{k}{k+1}\right)^{k^2}$

b) $\sum \frac{\sqrt{k-1!}}{\prod_{j=1}^{k}(1+\alpha\sqrt{j})}$ para $\alpha > 1$

c) $\sum \arctan\left(\frac{1}{1+k+k^2}\right)$ Ind: muestre que $\arctan x \leq x \forall x \geq 0$

Solucion

a) Se puede analizar con el criterio de la raiz n-esima:

$$\begin{aligned} r = \lim \sqrt[n]{\left(\frac{k}{k+1}\right)^{k^2}} &= \lim \left(\frac{k}{k+1}\right)^k = \lim \left(\frac{k+1-1}{k+1}\right)^k = \lim \left(1 - \frac{1}{k+1}\right)^k \\ &= \lim \frac{\left(1 - \frac{1}{k+1}\right)^{k+1}}{\left(1 - \frac{1}{k+1}\right)} = \frac{e^{-1}}{1} \end{aligned}$$

Como $r < 1$ significa que la serie converge.

b) Este serie conviene analizarla con el criterio del cuociente:

$$r = \lim \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim \frac{\frac{\sqrt{k!}}{\prod_{j=1}^{k+1}(1+\alpha\sqrt{j})}}{\frac{\sqrt{k-1!}}{\prod_{j=1}^{k}(1+\alpha\sqrt{j})}} = \lim \frac{\frac{\sqrt{k!}}{\prod_{j=1}^{k}(1+\alpha\sqrt{j})(1+\alpha\sqrt{k+1})}}{\frac{\sqrt{k-1!}}{\prod_{j=1}^{k}(1+\alpha\sqrt{j})}} = \lim \frac{\sqrt{k}}{(1+\alpha\sqrt{k+1})} = \frac{1}{\alpha}$$

Como $\alpha > 1 \Rightarrow r < 1$, luego la serie converge.

c) Queda propuesto al lector demostrar que $\arctan x \leq x$.
Utilizando la desigualdad, tenemos que:

$$\sum \arctan\left(\frac{1}{1+k+k^2}\right) < \sum \left(\frac{1}{1+k+k^2}\right)$$

Si probamos que $\sum\left(\frac{1}{1+k+k^2}\right)$ habremos probado, gracias al criterio de mayoracion de series, que $\sum\arctan\left(\frac{1}{1+k+k^2}\right)$ converge. Veamos entonces que la serie del lado derecho se puede analizar con el criterio de la integral. $\left(\frac{1}{1+k+k^2}\right)$ es claramente decreciente y esta bien definida en $[1,\infty)$.

$$\int_1^\infty \frac{1}{1+x+x^2} = \int_1^\infty \frac{1}{(x+1)^2-1}$$

Haciendo el cambio de variable $u = x+1$

$$\int_2^\infty \frac{1}{u^2-1} = \int_2^\infty \frac{1}{(u+1)(u-1)} = \int_2^\infty \frac{-1}{2(u+1)} + \frac{1}{2(u-1)} = \left|\frac{-1}{2}\ln(u+1) + \frac{1}{2}\ln(u-1)\right|_2^{s\to\infty}$$

$$= \left|\frac{1}{2}\ln\left(\frac{u-1}{u+1}\right)\right|_2^{s\to\infty} = 0 - \frac{1}{2}\ln(\frac{1}{3})$$

$$\Rightarrow \int_1^\infty \frac{1}{1+x+x^2} = -\frac{1}{2}\ln(\frac{1}{3})$$

Como la integral converge, entonces converge la serie. A su vez, como converge $\sum\left(\frac{1}{1+k+k^2}\right)$, entonces por el criterio de mayoracion $\sum\arctan\left(\frac{1}{1+k+k^2}\right)$ converge.