IQ57A: Dinámica y control de procesos
Capítulo 3: Control Feedback

J. Cristian Salgado - jsalgado@ing.uchile.cl

Departamento de Ingeniería Química y Biotecnología, Universidad de Chile

September 23, 2008

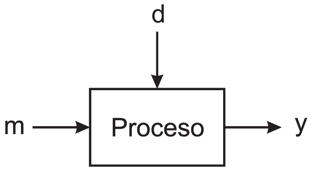
Objetivos

Al final de esta clase usted será capaz de

- Identificar un lazo cerrado de control Feedback
- Entender los problemas de servo control y de regulación
- Conocer las características los controladores básicos: P, PI y PID
- Analizar la respuesta de un lazo cerrado utilizando el criterio de ubicación de polos y la matriz de Routh.

Modelo de entrada y salida

Considere un sistema en modelo de entrada y salida



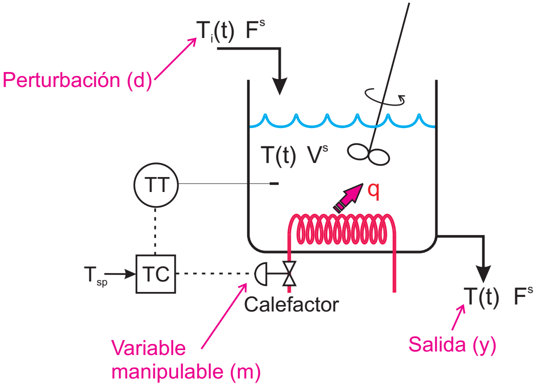
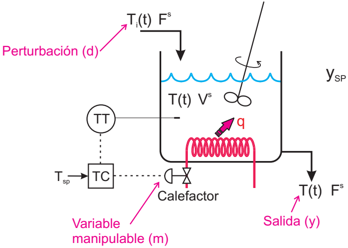
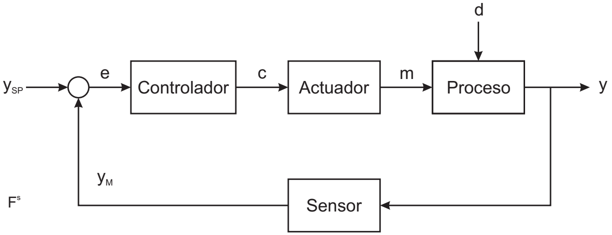


Diagrama de bloques de un sistema en lazo cerrado





Tipos de controladores

Tipos básicos de controlador:

- Proporcional P.
- Proporcional Integral (PI)
- Proporcional Integral Derivativo (PID)

Controlador Proporcional (P)

$$\begin{aligned} c(t) &= K_C \cdot e(t) + C_S \\ \xrightarrow{L} G_C(s) &= \frac{\overline{c'}(s)}{\overline{e}(s)} \\ &= K_C \end{aligned}$$

K_C: ganancia del controlador

Los controladores P son descritos por la ganancia del controlador K_C o por su banda proporcional $PB = 100/K_C$

Controlador Proporcional Integral (PI)

$$\begin{aligned} c(t) &= K_C \cdot e(t) + \frac{K_C}{\tau_I}\int_0^t e(t)dt + C_S \\ \xrightarrow{L} G_C(s) &= \frac{\overline{c'}(s)}{\overline{e}(s)} \\ &= K_C\left(1 + \frac{1}{\tau_I s}\right) \end{aligned}$$

K_C: ganancia del controlador
τ_I: constante de tiempo integral

Un controlador PI puede eliminar errores pequeños en la entrada pero si el error no es eliminado rápidamente la acción del controlador aumentará hasta saturar su salida.

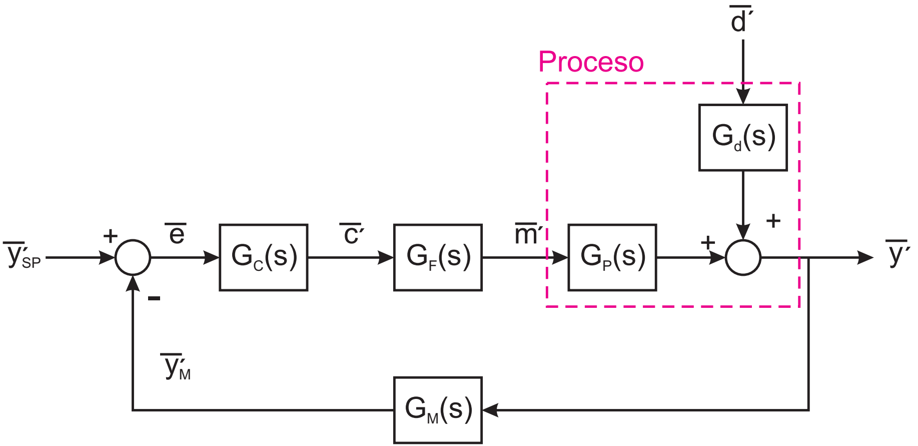
Controlador Proporcional Integral Derivativo (PID)

$$
\begin{aligned}
c(t) &= K_C \cdot e(t) + \frac{K_C}{\tau_I}\int_0^t e(t)dt + K_C\tau_D\frac{de}{dt} C_S \\
\xrightarrow{L} G_C(s) &= \frac{\overline{c'}(s)}{\overline{e}(s)} \\
&= K_C\left(1 + \frac{1}{\tau_I s} + \tau_D s\right)
\end{aligned}
$$

K_C: ganancia del controlador
τ_I: constante de tiempo integral
τ_D: constante de tiempo derivativo

El término derivativo anticipa la señal de error (la estima en función de la derivada) y genera una señal proporcional a la tasa de cambio del error. Desventajas en el caso de e constante o ruidoso.

Diagrama de bloques para la respuesta en lazo cerrado



Respuesta en lazo cerrado

$$\overline{y'}(s) = \underbrace{\frac{G_C G_F G_P}{1 + G_M G_C G_F G_P}}_{G_{SP}} \overline{y'_{sp}}(s) + \underbrace{\frac{G_d}{1 + G_M G_C G_F G_P}}_{G_{load}} \overline{d'}(s)$$

Función de transferencia
para el problema servo

$$\overline{d'}(s) = 0$$

Función de transferencia
para el problema de regulación

$$\overline{y'_{sp}}(s) = 0$$

Efecto de un controlador P en un sistema de primer orden

Suponiendo primeros ordenes para el proceso $G_P(s) = K_P/(\tau_P s + 1)$ y para la perturbación $G_d(s) = K_d/(\tau_P s + 1)$ y además que $G_M = G_F = 1$

La respuesta para el lazo cerrado será:

$$\overline{y'}(s) = \frac{K'_P}{\tau'_P s + 1}\overline{y'_{sp}}(s) + \frac{K'_d}{\tau'_P s + 1}\overline{d'}(s)$$

donde, $K'_P = \dfrac{K_P K_C}{1 + K_P K_C}$, $K'_d = \dfrac{K_d}{1 + K_P K_C}$, $\tau'_P = \dfrac{\tau_P}{1 + K_P K_C}$

Note que

- Se mantiene el orden del sistema (primer orden)
- La constante de tiempo y la ganancia estática se reducen
- Existe un offset en la regulación y en el servo control distinto de cero, *offset* $= y_\infty - y_{sp} \neq 0$

Efecto de un controlador P en un sistema de segundo orden

Suponiendo un segundo orden para el proceso $G_P(s) = K_P/(\tau^2 s + 2\zeta\tau + 1)$ y además que $G_M = G_F = 1$

La respuesta para el problema servo ($\overline{d'}(s) = 0$) en lazo cerrado será:

$$\overline{y'}(s) = \frac{K'_P}{\tau'^2 s^2 + 2\tau'\zeta' s + 1}\overline{y'_{sp}}(s)$$

donde, $K'_P = \dfrac{K_P K_C}{1 + K_P K_C}$, $\zeta' = \dfrac{\zeta}{\sqrt{1 + K_P K_C}}$, $\tau' = \dfrac{\tau}{\sqrt{1 + K_P K_C}}$

Note que

- Se mantiene el orden del sistema (segundo orden)
- La ganancia estática, el factor de amortiguación y el periodo de oscilación decrecen (un sistema sobre amortiguado puede volverse subamortiguado!)
- Un aumento de K_C producirá un sistema con una respuesta más rápida, con más overshoot y mayor decay ratio

Efecto de un controlador I en un sistema de primer orden

Suponiendo un primer orden para el proceso $G_P(s) = K_P/(\tau_P s + 1)$ y además que $G_M = G_F = 1$

La respuesta para el problema servo ($\overline{d'}(s) = 0$) en lazo cerrado será:

$$\overline{y'}(s) = \frac{1}{\tau'^2 s^2 + 2\tau'\zeta' s + 1}\overline{y'_{sp}}(s)$$

donde, $K'_P = 1$, $\zeta' = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\tau_I}{\tau_P K_P K_C}}$, $\tau' = \sqrt{\frac{\tau_I \tau_P}{K_P K_C}}$

Note que

- Aumenta el orden del sistema (de primer orden a segundo orden)
- La respuesta puede ser más lenta que un sistema de primer orden
- La ganancia del sistema en lazo cerrado es igual a 1, luego el offset es 0!
- Un aumento en K_C provoca una respuesta más rápida pero puede hacer oscilar el sistema (overshoot)

Efecto de un controlador D en un sistema de primer orden

Suponiendo un primer orden para el proceso $G_P(s) = K_P/(\tau_P s + 1)$ y además que $G_M = G_F = 1$

La respuesta para el problema servo ($\overline{d'}(s) = 0$) en lazo cerrado será:

$$\overline{y'}(s) = \frac{K_P K_C \tau_D s}{(\tau_P + K_P K_C \tau_D)s + 1} \overline{y'_{sp}}(s)$$

Note que

- El orden del sistema se mantiene
- Mientras más alta la constante derivativa (τ_D) más lenta la respuesta
- En sistemas de alto orden eso provoca estabilización de la respuesta

Efecto de un controlador D en un sistema de primer orden

PI

- Orden del sistema crece (acción integral)
- Offset es eliminado (acción integral)
- Aumento en K_C produce sistemas con respuesta más rápida pero oscilatoria (overshoot)

PID

- Sistema se estabiliza (acción derivativa)
- Se puede aumentar K_C sin aumentar demasiado el overshoot (acción derivativa)

Definición

Un sistema es considerado estable si para toda entrada acotada produce una respuesta acotada independiente del estado inicial

Definición operativa

La estabilidad de un sistema en lazo cerrado está definida por la ubicación de los polos de su función de transferencia:

$$\overline{y'}(s) = \frac{G_C G_F G_P}{1 + G_M G_C G_F G_P}\overline{y'_{sp}}(s) + \frac{G_d}{1 + G_M G_C G_F G_P}\overline{d'}(s)$$

los cuales son obtenidos de las raíces de su ecuación característica:

$$1 + G_M G_C G_F G_P = 0$$

Criterio de estabilidad de Routh

Routh

Criterio para determinar la localización de las raíces de la ecuación caractetística cuando esta se puede escribir como un polinomio:

$$1 + G_M G_C G_F G_P = a_0 s^n + a_1 s^{n-1} + a_2 s^{n-2} + \cdots + a_{n-1} s + a_n = 0$$

Procedimiento:

1. El sistema se debe escribir de manera que a_0 sea positivo
2. Si hay un coeficiente negativo entonces la ecuación tiene una raíz positiva y entonces el sistema es inestable
3. Si todos los coeficientes son positivos entonces el sistema puede ser estable o inestable. Entonces aplicamos el criterio de Routh

Criterio de estabilidad de Routh

Routh

$$1 + G_M G_C G_F G_P = a_0 s^n + a_1 s^{n-1} + a_2 s^{n-2} + \cdots + a_{n-1} s + a_n = 0$$

$$\begin{array}{c|ccccc}
1 & a_0 & a_2 & a_4 & a_6 & \cdots \\
2 & a_1 & a_3 & a_5 & a_7 & \cdots \\
3 & A_1 & A_2 & A_3 & \cdots & \cdots \\
4 & B_1 & B_2 & B_3 & \cdots & \cdots \\
5 & C_1 & C_2 & C_3 & \cdots & \cdots \\
\vdots & & & & &
\end{array}$$

donde

$$\begin{array}{llll}
A_1 = \dfrac{a_1 a_2 - a_0 a_3}{a_1} & A_2 = \dfrac{a_1 a_4 - a_0 a_5}{a_1} & A_3 = \dfrac{a_1 a_6 - a_0 a_7}{a_1} & \cdots \\
B_1 = \dfrac{A_1 a_3 - a_1 A_2}{A_1} & B_2 = \dfrac{A_1 A_5 - a_1 A_3}{A_1} & & \cdots \\
C_1 = \dfrac{B_1 A_2 - A_1 B_2}{B_1} & C_2 = \dfrac{B_1 A_3 - A_1 B_3}{B_1} & & \cdots \\
\vdots & & &
\end{array}$$

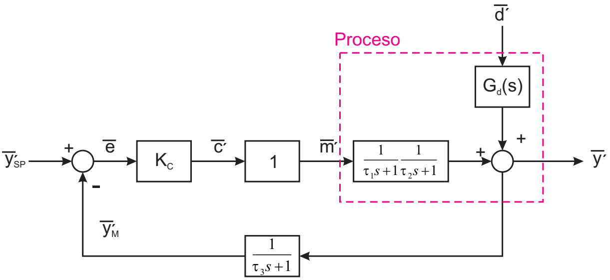
Criterio de estabilidad de Routh

Routh

Una vez construida la matriz de Routh para el sistema examine los coeficientes en la primera columna

1. Si alguno de estos coeficientes es negativo significa que al menos una raiz tiene parte real ubicada a la derecha del eje imaginario y el sistema es inestable
2. El número de cambios de signo en la primera columna es igual al número de raices a la derecha del eje imaginario

Ejemplo



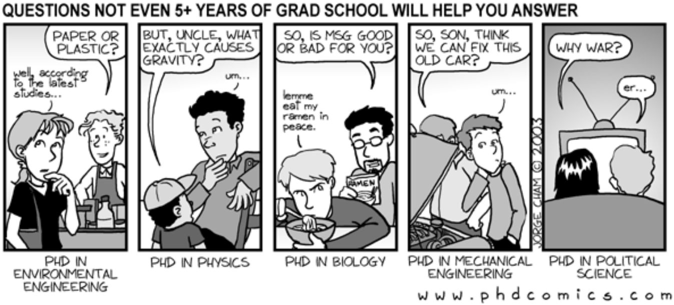
Entonces,

$$1 + G_M G_C G_F G_P = 1 + \frac{1}{\tau_1 s + 1} \cdot \frac{1}{\tau_2 s + 1} \cdot 1 \cdot K_C \cdot \frac{1}{\tau_3 s + 1} = 0$$

Si $\tau_1 = 1$, $\tau_2 = 1/2$, $\tau_3 = 1/3$, entonces

$$s^3 + 6s^2 + 11s + 6(1 + K_C) = 0$$

Preguntas



http://www.phdcomics.com