IQ57A: Dinámica y control de procesos
Capítulo 2: Sistemas de segundo orden
Polos y ceros de la función de transferencia

J. Cristian Salgado - jsalgado@ing.uchile.cl

Departamento de Ingeniería Química y Biotecnología, Universidad de Chile

August 29, 2008

Objetivos

Al final de esta clase usted será capaz de

- Determinar los polos y ceros de una función de transferencia
- Caracterizar la respuesta dinámica de un sistema estudiando sus polos
- Reconocer y caracterizar la respuesta dinámica de un sistema de segundo orden

Definición: Polos y ceros de la función de transferencia

La función de transferencia de la gran mayoría de los procesos se puede escribir como el cuociente entre dos polinomios (caso especial: retardo):

$$G(s) = \frac{\overline{y'}(s)}{\overline{f'}(s)} = \frac{Q(s)}{P(s)}$$

Definición: Ceros

Los ceros de la función de transferencia equivalen a las soluciones de

$$Q(s) = 0$$

"La función de transferencia evaluada en sus ceros será igual a cero"

Definición: Polos

Los ceros de la función de transferencia equivalen a las soluciones de

$$P(s) = 0$$

"La función de transferencia evaluada en sus polos tenderá a infinito"

Análisis de respuesta de los sistemas

La repuesta de un sistema frente a una entrada $\overline{f'}(s)$ también puede ser representada por el cuociente entre dos polinomios:

$$\overline{y'}(s) = G(s) \cdot \overline{f'}(s) = \frac{Q(s)}{P(s)} \frac{r(s)}{p(s)}$$

N.B.: La respuesta del sistema a la entrada $\overline{f'}(s)$ se obtiene a través de la inversión de esta expresión. Para ello resulta muy útil utilizar fracciones parciales.

Análisis de respuesta de los sistemas

Buscamos los polos de G(s):

$$G(s) = \frac{\overline{y'}(s)}{\overline{f'}(s)} = \frac{Q(s)}{P(s)}$$

Una vez encontrados los polos de la función de transferencia, ésta puede ser factorizada de la siguiente manera:

$$G(s) = \frac{Q(s)}{(s-p_1)(s-p_2)(s-p_3)^m(s-p_4)(s-p_4^*)(s-p_5)}$$

Luego ocupando fracciones parciales:

$$G(s) = \frac{C_1}{(s-p_1)} + \frac{C_2}{(s-p_2)} + \sum_{i=1}^{m} \frac{C_{3m}}{(s-p_3)^i} + \frac{C_4}{(s-p_4)} + \frac{C_4^*}{(s-p_4^*)} + \frac{C_5}{(s-p_5)}$$

Caso 1: polos reales y distintos

Sea, $p_1 < 0$ y $p_2 > 0$, la inversión de estos términos produce:

$$\begin{aligned}
\overline{y'}(s) &= \frac{C_1}{(s-p_1)} \\
\xrightarrow{L^{-1}} y'(t) &= C_1 e^{p_1 t} \\
\lim_{t\to\infty} y'(t) &= 0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\overline{y'}(s) &= \frac{C_1}{(s-p_2)} \\
\xrightarrow{L^{-1}} y'(t) &= C_1 e^{p_2 t} \\
\lim_{t\to\infty} y'(t) &= \infty
\end{aligned}$$

Observación

En el caso de polos reales y distintos el signo del polo determina si la respuesta crece infinitamente $(p > 0)$ o si decae a cero $(p < 0)$.

Caso 2: polos reales iguales

Sea, p_3 polo de $G(s)$ con m repeticiones, la inversión de estos términos produce:

$$\begin{aligned}
\overline{y'}(s) &= \sum_{i=1}^{m} \frac{C_{3m}}{(s-p_3)^i} \\
\xrightarrow{L^{-1}} y'(t) &= \sum_{i=1}^{m} \frac{C_{3m}}{(m-1)!} t^{m-1} e^{p_3 t} \\
\lim_{t\to\infty} y'(t) &= \begin{cases} \infty & p_3 > 0 \\ \infty & p_3 = 0 \\ 0 & p_3 < 0 \end{cases}
\end{aligned}$$

Observación

En el caso de polos reales iguales el signo del polo determina si la respuesta crece infinitamente $(p > 0)$ y $(p = 0)$ o si decae a cero $(p < 0)$.

Caso 3: polos complejos conjugados

Sea $p_4 = a + bj$ y $p_4^* = a - bj$, la inversión de estos términos produce:

$$\begin{aligned}
\overline{y'}(s) &= \frac{C_4}{(s - p_4)} + \frac{C_4^*}{(s - p_4^*)} \\
\xrightarrow{L^{-1}} y'(t) &= e^{at} sin(bt + \phi) \\
\lim_{t \to \infty} y'(t) &= \begin{cases} \infty & a > 0 \\ oscila & a = 0 \\ 0 & a < 0 \end{cases}
\end{aligned}$$

Observación

En el caso de polos complejos conjugados el signo de la parte real del polo determina si la respuesta crece infinitamente $(p > 0)$, oscila $(p = 0)$ o si decae a cero $(p < 0)$.

Caso 4: polos en el origen

Sea $p_5 = 0$, la inversión de estos términos produce:

$$\begin{aligned}
\overline{y'}(s) &= \frac{C_5}{(s - p_5)} = \frac{C_5}{s} \\
\xrightarrow{L^{-1}} y'(t) &= C_5
\end{aligned}$$

Observación

En el caso de polos ubicados en el origen dan como resultado una constante después de la inversión.

Key Points

- Notar bien que para una entrada particular además se deben considerar los polos adicionados por su denominador.
- Polos con parte real positiva dan origen a términos que crecen infinitamente en el tiempo: sistemas inestables.
- Sistemas estables serán aquellos con todos los polos en el semiplano izquierdo (parte real negativa)

Definición de sistemas de segundo orden

Sistemas de segundo orden son todos aquellos que son modelados por una ecuación diferencial de segundo orden.

$$a_2 \frac{d^2 y}{dt^2} + a_1 \frac{dy'}{dt} + a_0 y' = bf'(t)$$

Sea, $\tau^2 = \dfrac{a_2}{a_0}$, $2\zeta\tau = \dfrac{a_1}{a_0}$ y $K_P = \dfrac{b}{a_0}$ para $a_0 \neq 0$

$$\longrightarrow \qquad \tau^2 \frac{d^2 y'}{dt^2} + 2\zeta\tau \frac{dy'}{dt} + y' = K_P f'(t) \qquad \text{Forma canónica}$$

$$\xrightarrow{Laplace} \qquad G(s) = \frac{K_P}{\tau^2 s^2 + 2\zeta\tau s + 1} \qquad \text{Función de transferencia}$$

τ: Periodo de oscilación del sistema
ζ : Factor de amortiguación
K_P : Ganancia de estado estacionario

Ejemplos de sistemas de segundo orden

- Sistemas multicapacitivos (sistemas capacitivos/ primer orden en serie)
- Sistemas inherentemente de segundo orden (raros en Ingeniería Química)
- Sistemas a los que se les ha adicionado un sistema de control

Dinámica para la respuesta de un sistema de segundo orden

Supongamos que excitamos el sistema con un escalón en la entrada

Sea, $\overline{f'}(s) = \frac{1}{s}$

$$\longrightarrow \overline{y'}(s) = G(s)\overline{f'}(s) = \frac{K_P}{\tau^2 s^2 + 2\zeta\tau s + 1}\frac{1}{s}$$

La ubicación de los polos de esta ecuación entregan una pista de la dinámica del proceso.

$$p_{i=1,2} = -\frac{\zeta}{\tau} \pm \frac{\sqrt{\zeta^2 - 1}}{\tau}$$

Factorizando mediante los polos queda:

$$\longrightarrow \overline{y'}(s) = \frac{K_P/\tau^2}{s(s-p_1)(s-p_2)}$$

Respuesta sobre amortiguada: $\zeta > 1$

Para el caso $\zeta > 1$ tenemos 2 polos reales y distintos lo que se conoce como sistema con respuesta sobre amortiguado

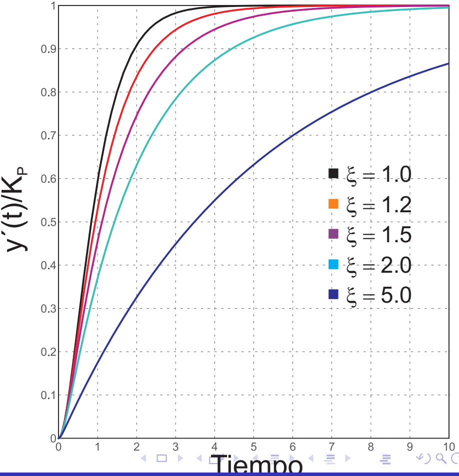
$$y'(t) = K_P \left[1 - e^{-t\zeta/\tau} \left(cosh\left(\frac{t}{\tau}\sqrt{\zeta^2 - 1}\right) + \frac{\zeta}{\sqrt{\zeta^2 - 1}} sinh\left(\frac{t}{\tau}\sqrt{\zeta^2 - 1}\right) \right) \right]$$

donde $sinh(x) = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$ y $cosh(x) = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$

Respuesta críticamente amortiguada: $\zeta = 1$

Para el caso $\zeta = 1$ tenemos 2 polos reales e iguales lo que se conoce como sistema con respuesta críticamente amortiguado

$$y'(t) = K_P \left[1 - e^{-t/\tau}\left(1 + \frac{t}{\tau}\right)\right]$$

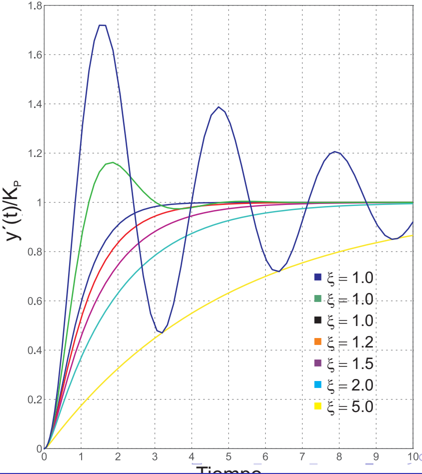


Respuesta sub amortiguada: $\zeta < 1$

Para el caso $\zeta < 1$ tenemos 2 polos complejos conjugados lo que se conoce como sistema con respuesta sub amortiguado

$$y'(t) = K_P\left[1 - \frac{1}{\sqrt{1-\zeta^2}} e^{-t\zeta/\tau} sin(\omega t + \phi)\right]$$

donde $\omega = \frac{\sqrt{1-\zeta^2}}{\tau}$ y $\phi = tan^{-1}\left(\frac{\sqrt{1-\zeta^2}}{\zeta}\right)$



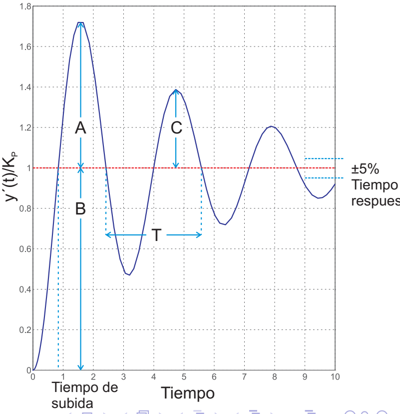
Caracterización de un sistema subamortiguado

$$O = \frac{A}{B} = exp\left(\frac{-\pi\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}}\right)$$ Overshoot

$$DR = exp\left(\frac{-2\pi\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}}\right) = O^2$$ Razón de decaimiento

$$T = \frac{2\pi\tau}{\sqrt{1-\zeta^2}}$$ Periodo de oscilación

$$T_N = 2\pi\tau$$ Periodo natural de oscilación

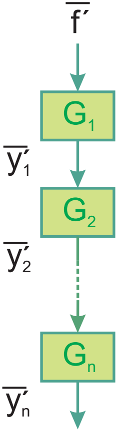


Definición de sistemas multicapacitivos

Los sistemas multicapacitivos corresponden a sistemas capacitivos (primer orden) dispuestos en serie. N.B. Dos sistemas de primer orden dispuestos en serie originan un sistema de segundo orden

- Sistemas capacitivos no interactuantes
- Sistemas capacitivos interactuantes

Sistemas capacitivos no interactuantes



Considere N sistemas de primer orden dispuestos en serie:

$$\tau_{P_1}\frac{dy'_1}{dt}+y'_1=K_{P_1}f'_1(t) \longrightarrow G_1(s)=\frac{\overline{y'_1}(s)}{\overline{f'_1}(s)}=\frac{K_{P_1}}{\tau_{P_1}s+1}$$

$$\tau_{P_2}\frac{dy'_2}{dt}+y'_2=K_{P_2}y'_1(t) \longrightarrow G_2(s)=\frac{\overline{y'_2}(s)}{\overline{y'_1}(s)}=\frac{K_{P_2}}{\tau_{P_2}s+1}$$

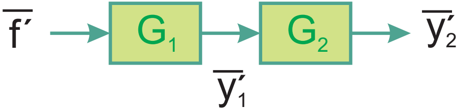
$$\vdots$$

$$\tau_{P_n}\frac{dy'_n}{dt}+y'_n=K_{P_n}y'_{n-1}(t) \longrightarrow G_n(s)=\frac{\overline{y'_n}(s)}{\overline{y'_{n-1}}(s)}=\frac{K_{P_n}}{\tau_{P_n}s+1}$$

$$\overline{y'_n}(s)=\overline{f'}(s)\prod_{i=1}^{n}G_i(s)=\overline{f'}(s)\prod_{i=1}^{n}\frac{K_{P_i}}{\tau_{P_i}s+1}$$

Ejemplo: Sistemas capacitivos no interactuantes

Considere N=2 sistemas de primer orden dispuestos en serie:

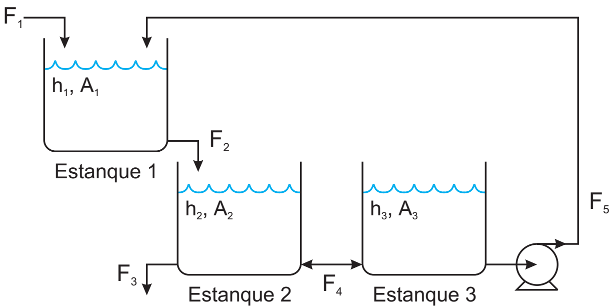


$$\overline{y'_n}(s) = \overline{f'}(s)\prod_{i=1}^{2} G_i(s) = \overline{f'}(s)\frac{K_{P_1}}{\tau_{P_1}s+1}\frac{K_{P_2}}{\tau_{P_2}s+1}$$

¿Qué características tiene este sistema?

Ejemplo: Sistemas capacitivos interactuantes

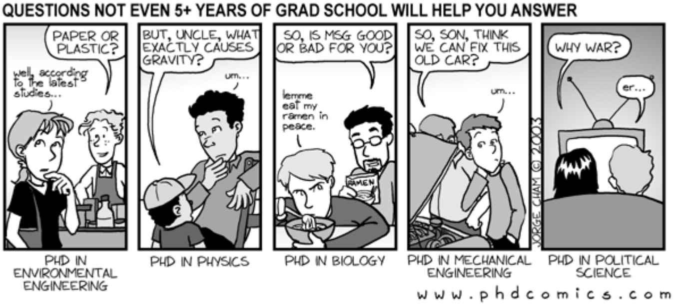
Un ejemplo clásico de sistemas interactuantes se muestra en la figura



Key Points

- Los polos de la función de transferencia permiten caracterizar el comportamiento dinámico del sistema
- Los sistemas de segundo orden se clasifican en función del factor de amortiguación ζ
- Sistemas no interactuantes aparecen al conectar sistemas de primer orden en serie.

Preguntas



http://www.phdcomics.com