IQ57A: Dinámica y control de procesos
Capítulo 2: Modelo de entrada salida, función de transferencia y modelos de primer orden

J. Cristian Salgado - jsalgado@ing.uchile.cl

Departamento de Ingeniería Química y Biotecnología, Universidad de Chile

August 24, 2008

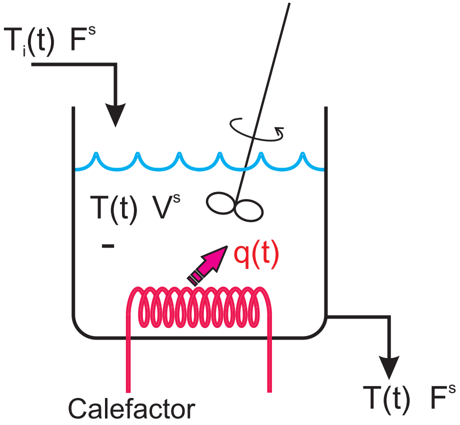
Objetivos

Al final de esta clase usted será capaz de

- Obtener el modelo de entrada/salida para un proceso
- Determinar la función de transferencia de un proceso
- Obtener la respuesta dinámica de un sistema de primer orden frente a un escalón unitario de entrada

Ejemplo: Estanque CSTR de calefacción

Considere un reactor CSTR donde se calienta la entrada desde T_i hasta T.



Modelo

$$\tau_P \frac{dT'}{dt} + T' = K_1 T_i' + K_2 T_v'$$

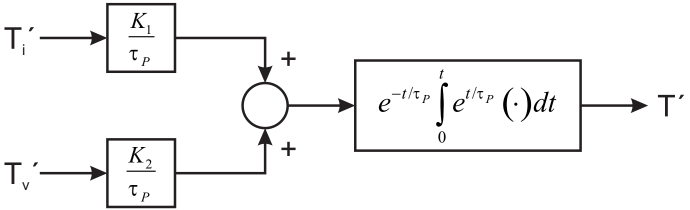
Resolver para $T'(0) = 0$ utilizando factor integrante.

Ejemplo: Estanque CSTR de calefacción - modelo integrado

Modelo resuelto (forma semi integrada)

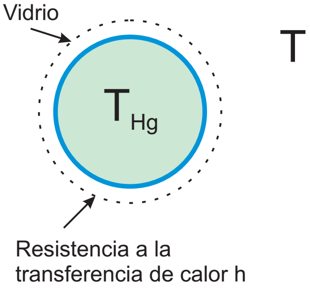
$$T'(t) = e^{-t/\tau_P} \int_0^t e^{t/\tau_P} \left(\frac{K_1}{\tau_P} T_i' + \frac{K_2}{\tau_P} T_v' \right) dt$$

En este caso la variable de salida del reactor/sistema T'es función de dos entradas T_i' y T_v'.



Ejemplo: Termómetro

Considere el termómetro de la figura.



Supuestos

- Resistencia a la transferencia de calor sólo en el fluido
- Mercurio cambia su temperatura uniformemente
- No existen efectos de expansión ni contracción en el fluido

Ejemplo: Termómetro - modelo diferencial con variables desviación

Modelo en el espacio temporal

$$M_{Hg} C_{Hg} \frac{dT'_{Hg}}{dt} = hA \left(T' - T'_{Hg} \right)$$

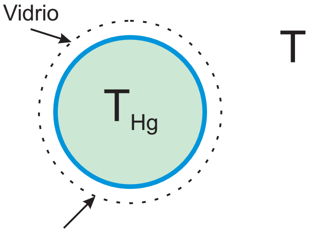
Aplicando la transformada de Laplace sobre la ecuación diferencial anterior obtenemos:

Modelo en el espacio complejo

$$\frac{M_{Hg} C_{Hg}}{hA} s\overline{T'_{Hg}}(s) + \overline{T'_{Hg}}(s) = \overline{T'}(s)$$

Ejemplo: Termómetro - Función de transferencia

Función de transferencia para el termómetro



Función de transferencia

$$G_{Termómetro}(s) = \frac{1}{\tau_{Termómetro}s + 1}$$

Notar bien que:

$$\tau_{Termómetro} = \frac{M_{Hg}C_{Hg}}{hA}$$

$$\overline{T'_{Hg}}(s) = G_{Termómetro}(s) \cdot \overline{T'}(s)$$

Definición función de transferencia

Definición

La función de transferencia de un proceso se define como el cuociente entre la transformada de Laplace de la salida y la entrada.

$$G_P(s) = \frac{\overline{Salida'}(s)}{\overline{Entrada'}(s)}$$

Variables desviación

Definición

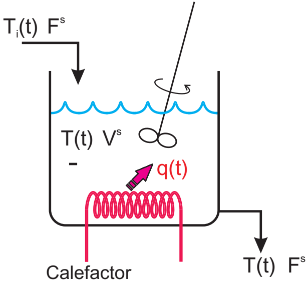
Diferencia entre la variable y su estado estacionario de referencia.

$$Y'(t) = Y(t) - Y^{ss}$$

- En el análisis de sistemas de control fijamos el interés en la desviación de las variables con respecto al estado estacionario de referencia
- El uso de variables de desviación simplifica la transformación de las derivadas (Laplace) ya que las condiciones iniciales son cero.

Modelo de entrada y salida del estanque

Utilizando Laplace sobre el modelo del estanque:



Modelo

Modelo en variable tiempo (t)

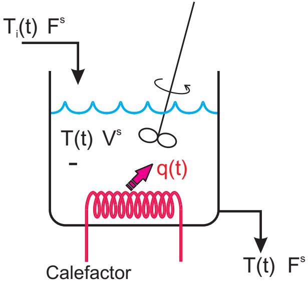
$$\tau_P \frac{dT'}{dt} + T' = K_1 T_i' + K_2 T_v'$$

Modelo en campo complejo (s)

$$\tau_P s \overline{T'}(s) + \overline{T'}(s) = K_1 \overline{T_i'}(s) + K_2 \overline{T_v'}(s)$$

Modelo de entrada y salida del estanque

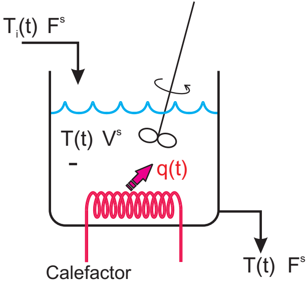
Reordenando...



$$\begin{aligned}
\tau_P s\overline{T'}(s) + \overline{T'}(s) &= K_1\overline{T'_i}(s) + K_2\overline{T'_v}(s) \\
\overline{T'}(s) &= \frac{K_1}{\tau_P s + 1}\overline{T'_i}(s) + \frac{K_2}{\tau_P s + 1}\overline{T'_v}(s) \\
\overline{T'}(s) &= G_1(s)\overline{T'_i}(s) + G_2(s)\overline{T'_v}(s) \\
G_1(s) &= \frac{K_1}{\tau_P s + 1} \\
G_2(s) &= \frac{K_2}{\tau_P s + 1}
\end{aligned}$$

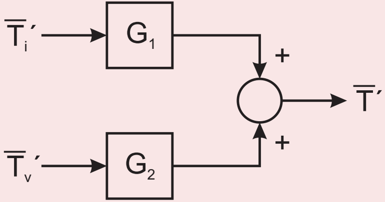
Modelo de entrada y salida del estanque

Finalmente...



Modelo de entrada y salida

$$\overline{T'}(s) = G_1(s)\overline{T_i'}(s) + G_2(s)\overline{T_v'}(s)$$



Propiedades de la función de transferencia

Información

La función de transferencia de un proceso G(s) describe su dinámica completamente i.e. contiene toda la información del proceso:

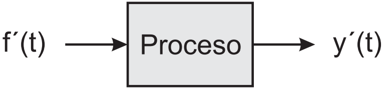
$$y'(t) = L^{-1}\{G(s) \cdot \overline{f'}(s)\}$$

Principio de superposición

Si $\overline{f'}(s) = a_1 \cdot \overline{f'_1}(s) + a_2 \cdot \overline{f'_2}(s)$

$$\begin{aligned} \overline{y'}(s) &= G(s) \cdot \overline{f'}(s) \\ \overline{y'}(s) &= a_1 \cdot G(s)\overline{f'_1}(s) + a_2 \cdot G(s)\overline{f'_2}(s) \\ \overline{y'}(s) &= a_1 \cdot \overline{y'_1}(s) + a_2 \cdot \overline{y'_2}(s) \end{aligned}$$

Procesos con una entrada y una salida



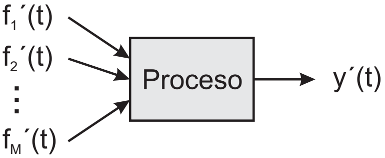
Considere un proceso con una entrada y una salida modelado por la siguiente ecuación diferencial:

$$a_n \frac{d^n y'}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} y'}{dt^{n-1}} + a_{n-2} \frac{d^{n-2} y'}{dt^{n-2}} + \cdots + a_1 \frac{dy'}{dt} + a_0 y' = b \cdot f'(t)$$

Sea $P(s) = a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + a_{n-2} s^{n-2} + \ldots + a_1 s + a_0$

$$G(s) = \frac{\overline{y'}(s)}{\overline{f'}(s)} = \frac{b}{P(s)}$$

Procesos con "M" entradas y una salida



Considere un proceso con "M" entradas y una salida:

$$a_n \frac{d^n y'}{dt^n} + a_{n-1}\frac{d^{n-1} y'}{dt^{n-1}} + a_{n-2}\frac{d^{n-2} y'}{dt^{n-2}} + \cdots + a_1 \frac{dy'}{dt} + a_0 y' = \sum_{i=1}^{M} b_i \cdot f_i'(t)$$

Sea $G_i(s) = \dfrac{b_i}{P(s)}$ "Función de transferencia entre la salida y la entrada i"

$$\overline{y'}(s) = \sum_{i=1}^{M} G_i(s)\overline{f_i'}(s)$$

Procesos con 2 entradas y 2 salidas

Para el caso de dos salidas y 2 entradas (M=N=2)

$$\begin{aligned}\frac{dy_1'}{dt} + a_{11}y_1' + a_{12}y_2' &= b_{11}f_1'(t) + b_{12}f_2'(t)\\ \frac{dy_2'}{dt} + a_{21}y_1' + a_{22}y_2' &= b_{21}f_1'(t) + b_{22}f_2'(t)\end{aligned}$$

Sea,

$$G_{11}(s) = \frac{b_{11}s + (a_{12}b_{21} - a_{22}b_{11})}{P(s)} \qquad G_{12}(s) = \frac{b_{12}s + (a_{12}b_{22} - a_{22}b_{12})}{P(s)}$$

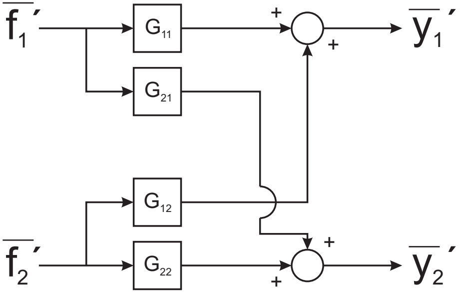
$$G_{21}(s) = \frac{b_{21}s + (a_{21}b_{11} - a_{11}b_{21})}{P(s)} \qquad G_{22}(s) = \frac{b_{22}s + (a_{21}b_{12} - a_{11}b_{22})}{P(s)}$$

Entonces

$$\begin{aligned}\overline{y_1'}(s) &= G_{11}(s)\cdot\overline{f_1'}(s) + G_{12}(s)\cdot\overline{f_2'}(s)\\ \overline{y_2'}(s) &= G_{21}(s)\cdot\overline{f_1'}(s) + G_{22}(s)\cdot\overline{f_2'}(s)\end{aligned}$$

Procesos con 2 entradas y 2 salidas: diagrama de bloques

$$\begin{aligned}\overline{y_1'}(s) &= G_{11}(s)\cdot\overline{f_1'}(s) + G_{12}(s)\cdot\overline{f_2'}(s)\\ \overline{y_2'}(s) &= G_{21}(s)\cdot\overline{f_1'}(s) + G_{22}(s)\cdot\overline{f_2'}(s)\end{aligned}$$



Procesos con M entradas y N salidas

Para el caso de un sistema con M entradas y N salidas

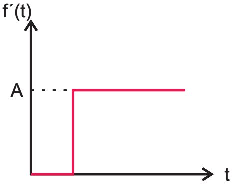
$$\overline{y_i'}(s) = \sum_{j=1}^{M} G_{ij}(s)\overline{f_j'}(s) \qquad \forall i = 1..N$$

Lo que en notación matricial se escribe como:

$$\begin{bmatrix} \overline{y_1'}(s) \\ \overline{y_2'}(s) \\ \vdots \\ \overline{y_N'}(s) \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} G_{11} & G_{12} & \cdots & G_{1M} \\ G_{21} & G_{22} & \cdots & G_{2M} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ G_{N1} & G_{N2} & \cdots & G_{NM} \end{pmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \overline{f_1'}(s) \\ \overline{f_2'}(s) \\ \vdots \\ \overline{f_M'}(s) \end{bmatrix}$$

Funciones de entrada

Escalón de tamaño A

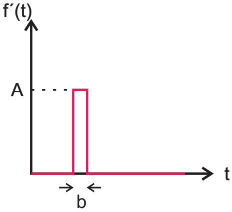


$$f'(t) = A \cdot u(t)$$

$$u(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ 1 & t \geq 0 \end{cases}$$

$$\overline{f'}(s) = \frac{A}{s}$$

Pulso de tamaño A

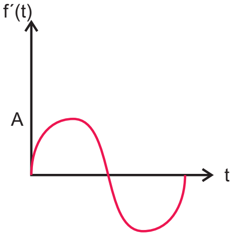


$$f'(t) = A \cdot \delta(t)$$

$$f'(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ A/b & 0 \leq t \leq b \\ 0 & t > b \end{cases}$$

$$\overline{f'}(s) = A$$

Entrada sinusoidal

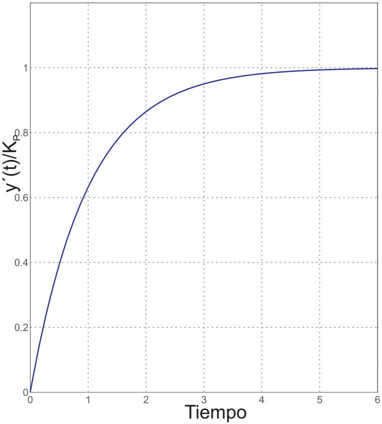


$$f'(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ Asin(\omega t) & t \geq 0 \end{cases}$$

$$\overline{f'}(s) = \frac{A\omega}{s^2 + \omega^2}$$

Respuesta de un sistema de primer orden

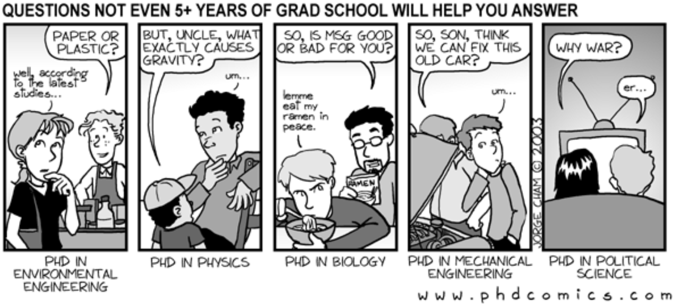
Respuesta de un sistema de primer orden a un escalón unitario en la entrada:



Key Points

- La función de transferencia captura toda la información de un proceso
- Los diagramas de entradas y salidas permiten visualizar fácilmente las relaciones entre variables

Preguntas



http://www.phdcomics.com