Universidad de Chile
Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas
Departamento de Ingeniería Química y Biotecnología
IQ46B - Operaciones de Transferencia I

UNIDAD 1: TRANSFERENCIA DE CALOR

Dependencia del tiempo: Estado transiente

Profesor: Tomás Vargas Valero

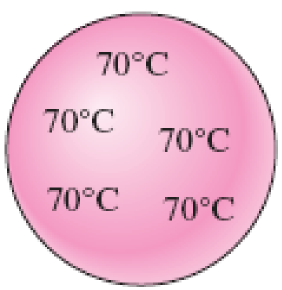
Introducción

- En general la temperatura de los cuerpos varía en función del tiempo y la posición

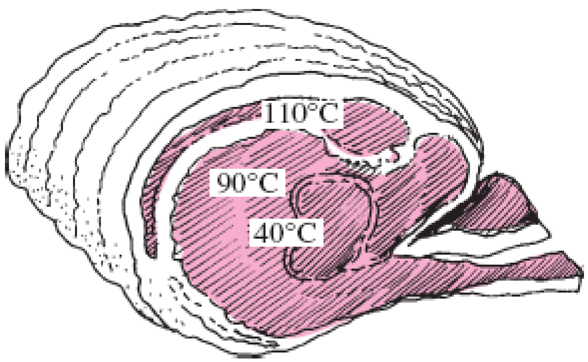
$$T(x, y, z, t)$$

Hasta ahora considerada despreciable
(ESTADO ESTACIONARIO)

Si consideramos variaciones de temperatura respecto al tiempo podemos tener dos casos:



Una pequeña esfera de cobre sacada del interior de un horno (SIN VARIACIÓN ESPACIAL DE T)

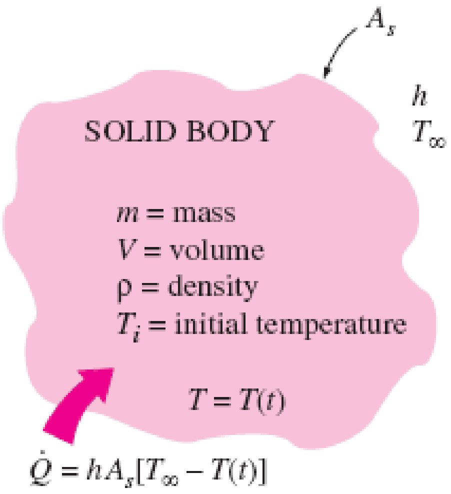


Un trozo de carne siendo asada en el horno (CON VARIACIÓN ESPACIAL DE T)

Sistema sin variación espacial

¡Generalizamos el sistema!

<u>Sólido de forma arbitraria</u>



$T_i < T_\infty$

$T = T(t)$

En t = 0 el sólido de coloca en un medio a T_∞

En un diferencial *dt* el balance de energía será:

Energía transferida al cuerpo en *dt* = Aumento de energía del cuerpo en *dt*

$$h \cdot A_s \cdot (T_\infty - T) \cdot dt = m \cdot c_p \cdot dT$$

, donde $m = \rho \cdot V$, y además $dT = d(T - T_\infty)$

$$\frac{d(T - T_\infty)}{T - T_\infty} = -\frac{h \cdot A_s}{\rho \cdot V \cdot c_p} \cdot dt$$

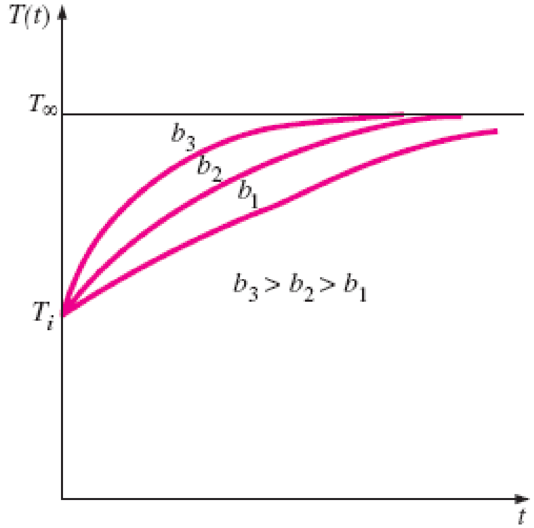
Sistema sin variación espacial

Entonces tendremos que:

$$\frac{T(t)-T_\infty}{T_i-T_\infty}=\exp(-b\cdot t)$$

$$b=\frac{h\cdot A_s}{\rho\cdot V\cdot c_p}$$

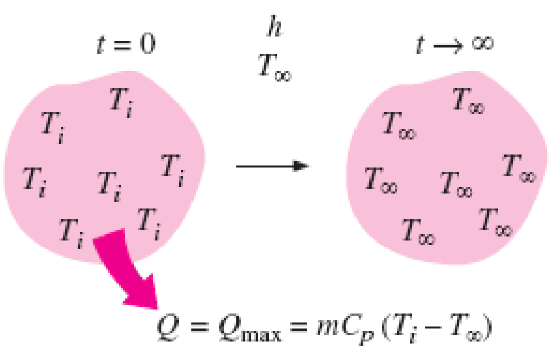
Constante de tiempo [1/s]



$$Q(t)=h\cdot A_s\cdot\left[T(t)\ -\ T_\infty\right]$$

$$Q(t)=m\cdot c_p\cdot\left[T(t)\ -\ T_i\right]$$

$$Q_{max}=m\cdot c_p\cdot\left[T_\infty\ -\ T_i\right]$$



Sistema sin variación espacial

¿Cuándo podemos aplicar este modelo?

PASO 1. Largo característico

$$L_c = \frac{V}{A_s}$$

PASO 2. Número de Biot

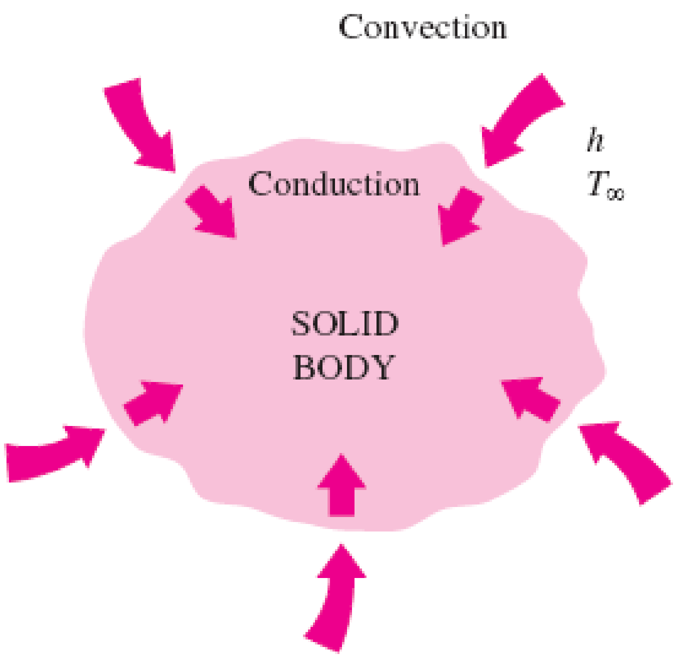
$$Bi = \frac{h \cdot L_c}{k}$$

o también,

$$Bi = \frac{h}{k/L_c} \cdot \frac{\Delta T}{\Delta T}$$

(convección en la superficie del cuerpo)

(conducción dentro del cuerpo)



$$\text{Bi} = \frac{\text{heat convection}}{\text{heat conduction}}$$

Bi = 0, aproximación perfecta

Bi ≤ 0,1, aproximación *aceptable*

Sistema sin variación espacial

Ejemplo N° 1. Prediciendo su tiempo de muerte…

Una persona fue encontrada muerta a las 5 p.m. en una habitación a 20 °C. La temperatura del cuerpo es 25 °C y el coeficiente de transferencia de calor por convección del aire se estima en *h* = 8 $^{W}/_{m^2\text{-}°C}$. Modelando el cuerpo como un cilindro de 30 cm de diámetro y 1,7 m de largo, estime el tiempo de muerte de la persona.

Consideraciones:
- La persona estaba *saludable* al momento de morir por lo cual su temperatura corporal era de 37 °C
- Si se considera que el ser humano está compuesto por un 72% de agua (% masa), entonces a la temperatura promedio [$^{(37\,+\,25)°C}/_{2}$] las propiedades termodinámicas son:

$$k = 0{,}617 \; {}^{W}\!\big/_{m - °C}$$

$$\rho = 996 \; {}^{kg}\!\big/_{m^3}$$

$$c_p = 4.178 \; {}^{J}\!\big/_{kg - °C}$$

Sistema sin variación espacial

Ejemplo N° 1. Prediciendo su tiempo de muerte…

Una persona fue encontrada muerta a las 5 p.m. en una habitación a 20 °C. La temperatura del cuerpo es 25 °C y el coeficiente de transferencia de calor por convección del aire se estima en *h* = 8 $^{W}/_{m^2\text{-}°C}$. Modelando el cuerpo como un cilindro de 30 cm de diámetro y 1,7 m de largo, estime el tiempo de muerte de la persona.

$$L_c = \frac{V}{A_s} = \frac{\pi \cdot r_0^2 \cdot L}{2 \cdot \pi \cdot r_0 \cdot L + 2 \cdot \pi \cdot r_0^2} = 0{,}0689 \;\; m$$

$$\boxed{Bi = \frac{h \cdot L_c}{k} = 0{,}89 > 0{,}1} \longrightarrow$$

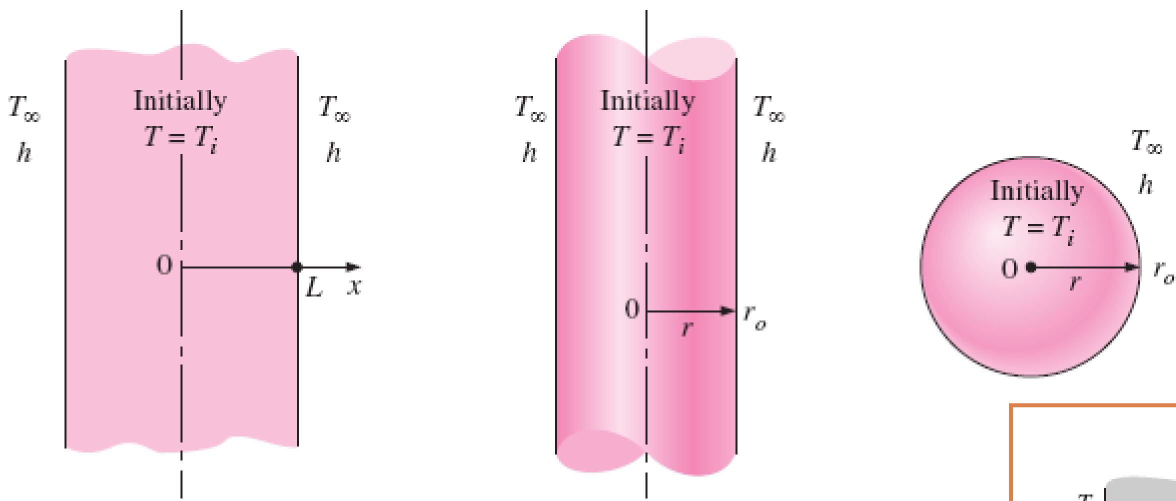
¡MODELO NO APLICABLE!

$$b = \frac{h \cdot A_s}{\rho \cdot V \cdot c_p} = 2{,}79 \times 10^{-5} \;\; s^{-1}$$

$$\frac{T(t) - T_\infty}{T_i - T_\infty} = \exp(-b \cdot t) \;\; \Rightarrow \;\; \boxed{t = 12{,}2 \;\; h}$$

Sistema con variación espacial

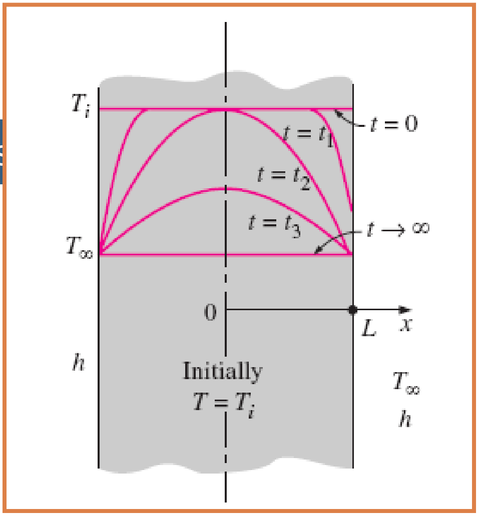
En t = 0 temperatura de los cuerpos igual a T_i



Pared plana

Cilindro

Es



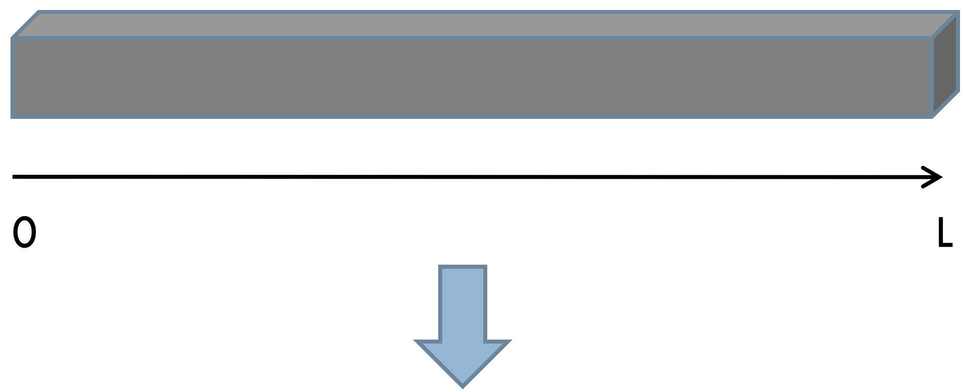
-Se comienzan a enfriar en $t = 0$ ($T_\infty < T_i$)

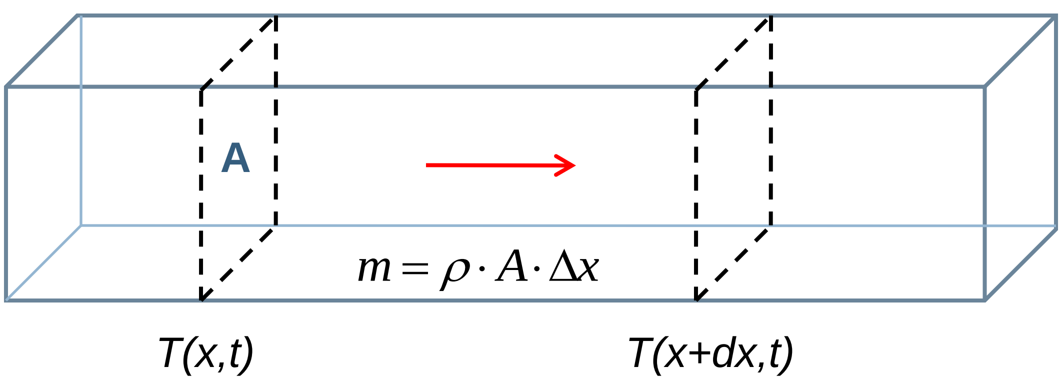
-Simetría respecto a ejes vertical o centro del cuerpo

¿Qué importancia puede tener esto?

Sistema con variación espacial

Ecuaciones en derivadas parciales: resolvamos el balance para una barra de metal





Fourier

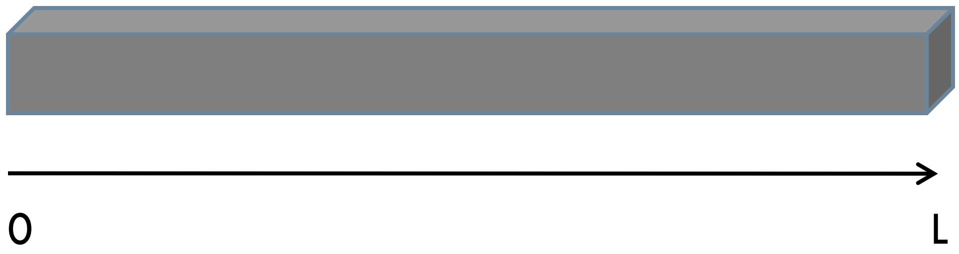
$$Q = k \cdot A \cdot \left(\left. \frac{dT}{dx} \right|_{x+\Delta x} - \left. \frac{dT}{dx} \right|_{x} \right)$$

Energía interna

$$Q = m \cdot c_p \cdot \frac{dT}{dt}$$

Sistema con variación espacial

Ecuaciones en derivadas parciales: resolvamos el balance para una barra de metal



$$k \cdot \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = \rho \cdot c_p \cdot \frac{\partial T}{\partial t}$$

Soluciones del tipo

$$T(x,t) = \sum_{m=0}^{\infty} T_m(x,t)$$

T_m obtenidos con variables separables

Extenderlo a dos o tres dimensiones es aplicar la misma metodología…

Veamos la solución de este problema para una placa plana que está a 0 °C y se calienta en *t* = 0 a 100 °C (bordes a temperatura continua)

Sistema con variación espacial

Ya se han desarrollado soluciones analíticas de los sistemas especificados…

Se definen parámetros adimensionales (pared plana, por ejemplo)

Temperatura adimensional

$$\theta(x,t) = \frac{T(x,t) - T_\infty}{T_i - T_\infty}$$

Distancia adimensional desde el centro

$$X = \frac{x}{L}$$

Aproximaciones para $\tau > 0{,}2$

Coeficiente adimensional de transferencia de calor

$$Bi = \frac{h \cdot L}{k}$$

Tiempo adimensional

$$\tau = \frac{\alpha \cdot t}{L^2}$$

Para cilindros y esferas:
Lo mismo reemplazando *L* por r_0

Sistema con variación espacial

Pared plana

$$\theta(x,t)_{pared} = \frac{T(x,t)-T_\infty}{T_i - T_\infty} = A_1 \cdot \exp\left(-\lambda_1^2 \cdot \tau\right) \cdot \cos\left(\frac{\lambda_1 \cdot x}{L}\right)$$

Cilindro

$$\theta(x,t)_{cilindro} = \frac{T(r,t)-T_\infty}{T_i - T_\infty} = A_1 \cdot \exp\left(-\lambda_1^2 \cdot \tau\right) \cdot J_0\left(\frac{\lambda_1 \cdot r}{r_0}\right)$$

Esfera

$$\theta(x,t)_{esfera} = \frac{T(r,t)-T_\infty}{T_i - T_\infty} = A_1 \cdot \exp\left(-\lambda_1^2 \cdot \tau\right) \cdot \frac{sen\left(\frac{\lambda_1 \cdot r}{r_0}\right)}{\frac{\lambda_1 \cdot r}{r_0}}$$

A_1 y λ_1 dependen del número de Biot
J_0 función de Bessel

Sistema con variación espacial

	Plane Wall		Cylinder		Sphere	
Bi	λ_1	A_1	λ_1	A_1	λ_1	A_1
0.01	0.0998	1.0017	0.1412	1.0025	0.1730	1.0030
0.02	0.1410	1.0033	0.1995	1.0050	0.2445	1.0060
0.04	0.1987	1.0066	0.2814	1.0099	0.3450	1.0120
0.06	0.2425	1.0098	0.3438	1.0148	0.4217	1.0179
0.08	0.2791	1.0130	0.3960	1.0197	0.4860	1.0239
0.1	0.3111	1.0161	0.4417	1.0246	0.5423	1.0298
0.2	0.4328	1.0311	0.6170	1.0483	0.7593	1.0592
0.3	0.5218	1.0450	0.7465	1.0712	0.9208	1.0880
0.4	0.5932	1.0580	0.8516	1.0931	1.0528	1.1164
0.5	0.6533	1.0701	0.9408	1.1143	1.1656	1.1441
0.6	0.7051	1.0814	1.0184	1.1345	1.2644	1.1713
0.7	0.7506	1.0918	1.0873	1.1539	1.3525	1.1978
0.8	0.7910	1.1016	1.1490	1.1724	1.4320	1.2236
0.9	0.8274	1.1107	1.2048	1.1902	1.5044	1.2488
1.0	0.8603	1.1191	1.2558	1.2071	1.5708	1.2732
2.0	1.0769	1.1785	1.5995	1.3384	2.0288	1.4793
3.0	1.1925	1.2102	1.7887	1.4191	2.2889	1.6227
4.0	1.2646	1.2287	1.9081	1.4698	2.4556	1.7202
5.0	1.3138	1.2403	1.9898	1.5029	2.5704	1.7870
6.0	1.3496	1.2479	2.0490	1.5253	2.6537	1.8338
7.0	1.3766	1.2532	2.0937	1.5411	2.7165	1.8673
8.0	1.3978	1.2570	2.1286	1.5526	2.7654	1.8920
9.0	1.4149	1.2598	2.1566	1.5611	2.8044	1.9106
10.0	1.4289	1.2620	2.1795	1.5677	2.8363	1.9249
20.0	1.4961	1.2699	2.2880	1.5919	2.9857	1.9781
30.0	1.5202	1.2717	2.3261	1.5973	3.0372	1.9898
40.0	1.5325	1.2723	2.3455	1.5993	3.0632	1.9942
50.0	1.5400	1.2727	2.3572	1.6002	3.0788	1.9962
100.0	1.5552	1.2731	2.3809	1.6015	3.1102	1.9990
∞	1.5708	1.2732	2.4048	1.6021	3.1416	2.0000

ξ	$J_o(\xi)$	$J_1(\xi)$
0.0	1.0000	0.0000
0.1	0.9975	0.0499
0.2	0.9900	0.0995
0.3	0.9776	0.1483
0.4	0.9604	0.1960
0.5	0.9385	0.2423
0.6	0.9120	0.2867
0.7	0.8812	0.3290
0.8	0.8463	0.3688
0.9	0.8075	0.4059
1.0	0.7652	0.4400
1.1	0.7196	0.4709
1.2	0.6711	0.4983
1.3	0.6201	0.5220
1.4	0.5669	0.5419
1.5	0.5118	0.5579
1.6	0.4554	0.5699
1.7	0.3980	0.5778
1.8	0.3400	0.5815
1.9	0.2818	0.5812
2.0	0.2239	0.5767
2.1	0.1666	0.5683
2.2	0.1104	0.5560
2.3	0.0555	0.5399
2.4	0.0025	0.5202
2.6	−0.0968	−0.4708
2.8	−0.1850	−0.4097
3.0	−0.2601	−0.3391
3.2	−0.3202	−0.2613

Sistema con variación espacial

También podemos tener relaciones de calor:

Pared plana

$$\left(\frac{Q}{Q_{\max}}\right)_{pared} = 1 - \theta_{0,\,pared} \cdot \frac{sen(\lambda_1)}{\lambda_1}$$

Cilindro

$$\left(\frac{Q}{Q_{\max}}\right)_{cilindro} = 1 - 2 \cdot \theta_{0,cilindro} \cdot \frac{J_1(\lambda_1)}{\lambda_1}$$

Esfera

$$\left(\frac{Q}{Q_{\max}}\right)_{esfera} = 1 - 3 \cdot \theta_{0,esfera} \cdot \frac{sen(\lambda_1) - \lambda_1 \cdot \cos(\lambda_1)}{\lambda_1^3}$$

Sistema sin variación espacial

Ejemplo N° 2. Cociendo huevitos…

Un huevo se puede considerar como una esfera de 5 cm de diámetro. Inicialmente el huevo está a una temperatura uniforme de 5 °C y se deja caer en agua hirviendo a 95 °C. Tomando el coeficiente de transferencia de calor por convección como *h* = 1.200 $^{W}/_{m^2\text{-}°C}$, determine cuánto tiempo transcurrirá para que el centro del huevo llegue a 70 °C

Consideraciones:

-Si se considera que el huevo está compuesto por un 74% de agua (% masa), entonces a la temperatura promedio [$^{(5+70)°C}/_{2}$] las propiedades termodinámicas son:

$$k = 0{,}627 \ {}^{W}\!/_{m-°C}$$

$$\rho = 993 \ {}^{kg}\!/_{m^3}$$

$$c_p = 4.178 \ {}^{J}\!/_{kg-°C}$$

$$\alpha = \frac{k}{\rho \cdot c_p}$$

Sistema sin variación espacial

Ejemplo N° 2. Cociendo huevitos…

Un huevo se puede considerar como una esfera de 5 cm de diámetro. Inicialmente el huevo está a una temperatura uniforme de 5 °C y se deja caer en agua hirviendo a 95 °C. Tomando el coeficiente de transferencia de calor por convección como *h* = 1.200 $^{W}/_{m^{2}\text{-}°C}$, determine cuánto tiempo transcurrirá para que el centro del huevo llegue a 70 °C

$$Bi = \frac{h \cdot r_0}{k} = 47{,}8 \longrightarrow$$

Pero Biot exacto es:

$$Bi = \frac{h \cdot r_0}{3 \cdot k} = 15{,}9$$

¡Resultado muy similar!

$$\lambda_1 = 3{,}0753; \quad A_1 = 1{,}9958$$

$$\theta(x,t)_{esfera} = \frac{T(r,t) - T_\infty}{T_i - T_\infty} = A_1 \cdot \exp\left(-\lambda_1^2 \cdot \tau\right) \Rightarrow \tau = 0{,}209$$

Mayor que 0,2 (nos salvamos…)

$$\tau = \frac{\alpha \cdot t}{r_0^2} \Rightarrow \boxed{t = 14{,}4 \ \text{min}}$$