

Es integral de cantidad de movimiento:

$$\int_V \frac{\partial (\rho \vec{v})}{\partial t} dV + \int_S \rho \vec{v} \vec{v} \cdot d\vec{A} = \int_V \vec{G} dV - \int_S p d\vec{A} - \int_S \vec{\phi} \cdot d\vec{A}$$

peso del fluido en  $V = \vec{W}$ 
fricción - esfuerzo tangencial

Aplicación a es integral de cantidad de movimiento:

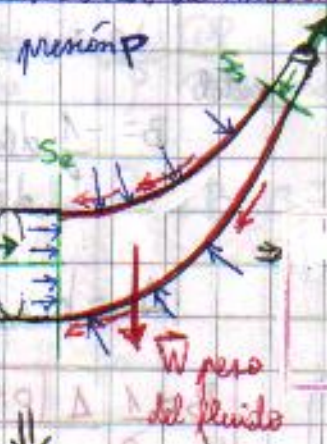
Caso estacionario:  $\frac{\partial}{\partial t} = 0$

en la pared  $\vec{v} \rightarrow 0$   
en el centro  $\vec{v} = \vec{v}_{max}$

$$\int_S = \int_{S_e} + \int_{S_s} + \int_{S_{par}} = 0$$

$$\int_{S_e} \rho \vec{v} \vec{v} \cdot d\vec{A} = - \rho_e \vec{v}_e \beta_e F_{ve}$$

$\rho_e F_{ve} = F_{me}$   
 $\beta_e$  coef de corrección que se aplica al  $\vec{v}_e$



$$\int_S \rho \vec{v} \vec{v} \cdot d\vec{A} = - F_{me} \beta_e \vec{v}_e + F_{ms} \beta_s \vec{v}_s$$

$F_{me} = F_{ms}$

$$\% = - F_m (\beta_e \vec{v}_e + \beta_s \vec{v}_s) = \text{peso } \vec{W} - p_e \vec{A}_e + p_s \vec{A}_s + \vec{F}_w$$

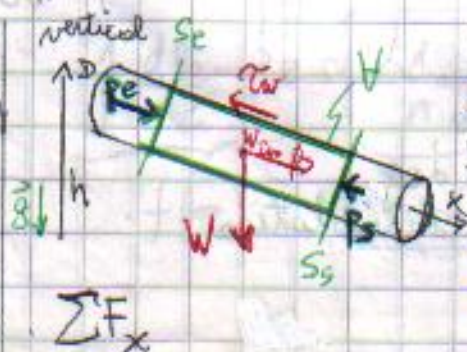
en  $S_s$ :

$$\int_{S_s} \rho \vec{v} \vec{v} \cdot d\vec{A} = + \rho_s \vec{v}_s \beta_s F_{vs}$$

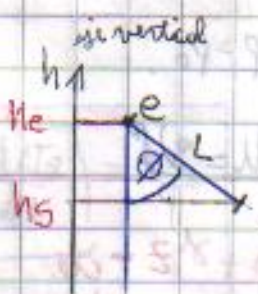
$\beta$  non poco diferentes de 1.

Aplicación al Flujo Turbulento en Tubos:

Flujo uniforme  
(diámetros uniformes)  
estacionario,  
incompresible  
(incluye gases a  
baja velocidad)



$V_{cte}$   
 $F_{w,cte}$   
 $F_{m,cte}$



$$\sum F_x = 0 = p_e A - p_s A - \tau_w \pi D L + W_{comp}$$

$$W = \frac{\pi D^2}{4} L \rho g$$

$$\cos \phi = \frac{h_c - h_s}{L}$$

$$\chi = \rho g$$

Se obtiene:

$$\tau_w = \frac{A}{\pi D L} [(p_e - p_s) + \chi (h_e - h_s)]$$

$$\tau_w = \frac{D}{4} \frac{\Delta(p + \chi h)}{L}$$

$$\Delta = (h_e - h_s)$$

$$A = \pi R^2 = \frac{\pi D^2}{4}$$

esp. del tubo

$$\frac{\pi D^2}{4} = \frac{D}{4L}$$

Para flujo laminar, la solución analítica nos indica:

$$V = \frac{1}{A} \int_0^R v_z 2\pi r dr = \frac{8R^2}{8V} = \frac{\Delta(p + \chi h) D^2}{32\mu}$$

$$\tau = \mu \frac{dv}{dn} \text{ Esfuerzo tangencial}$$

$$A = \pi R^2$$

$$B = \frac{1}{P} \frac{\Delta(p + \chi h)}{L}$$

$$\tau_w = 8\mu \frac{V}{D}$$

Pseudo-Viscosidad  
hidrológica

V medio? ☒  
parece que sí.

Flujo turbulento

Similitud dinámica  $\rightarrow$  organizar datos

$$\phi(\tau_w, V, D, P, \mu) = 0$$

$\phi$  es una función desconocida.  
 $F = ma$

Teorema  $\pi$  o  $\pi$  de Buckingham:

$$[\tau_w] = \frac{[F]}{[A]} = \frac{[ma]}{[A]} = \frac{[MK]}{[L^2 L^2]} = [L^{-1} M^1 T^{-2}]$$

$n^\circ$  productos independientes =  $n^\circ$  variables -  $n^\circ$  dimensiones.

En este caso  $m = 5 - 3 - 2$

$\Rightarrow$  En. se reemplaza por  $\phi' = \phi'(\pi_1, \pi_2, \pi_3)$

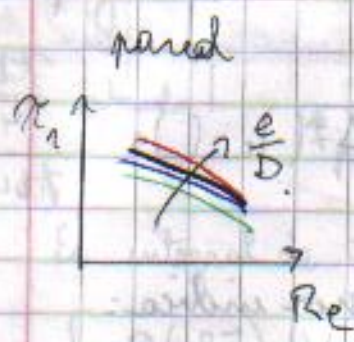
$$\pi_1 = \frac{\tau_w}{\rho V^2} \quad \pi_2 = \frac{\rho V D}{\mu} Re$$

$$\pi_1 = \pi_1(\tau_w, V, D, \rho)$$

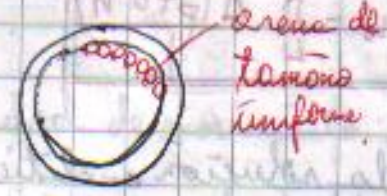




$e$  aspereza de la pared.



hikuradre



$\tau_w =$  Coeficiente de fricción  
 $= C_f$

$$C_f = \frac{\tau_w}{\frac{1}{2} \rho V^2}$$

Coef. de Fanning (ingles)

Resolución experimental para luego poder despejar  $\tau_w$

$$f = 4 C_f = \frac{\tau_w}{\frac{1}{8} \rho V^2}$$

Coef. de Darcy (francés)

### Flujo Uniforme en Tubos



$\tau_w$  esfuerzo tangencial  
fuerza de gravedad.

$$\tau_w = \frac{\Delta p (r + \frac{1}{2} D)}{4 L}$$

30-03-2023

Gravesol

$$\Delta p = p_e - p_s$$

$$\tau_w = C_f \frac{1}{2} \rho V^2 = f \frac{1}{8} \rho V^2$$

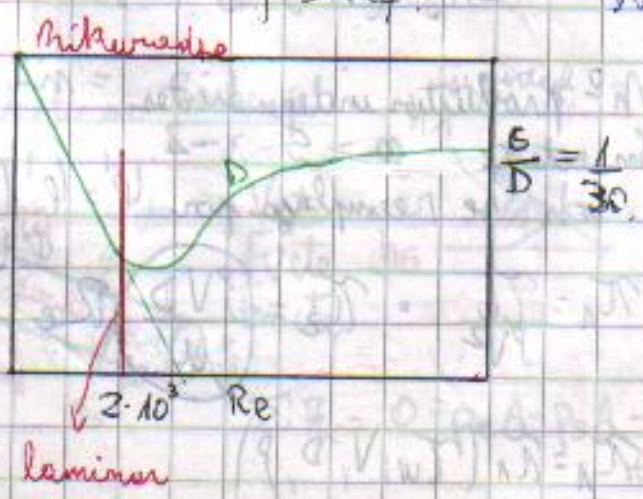
Fanning

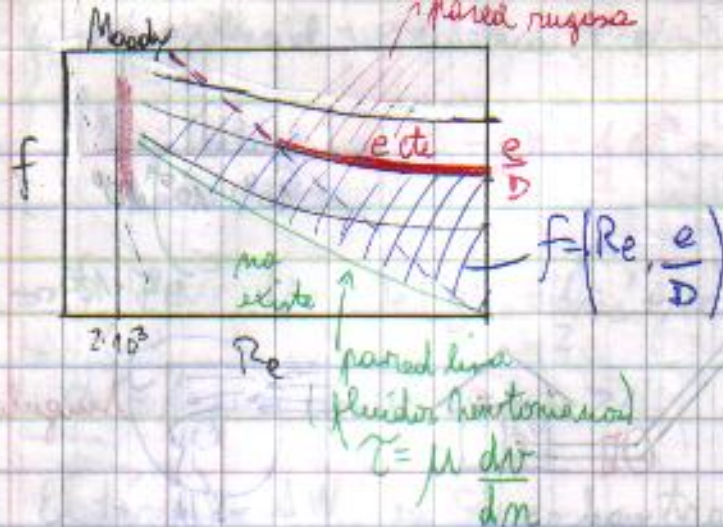
Darcy

$$f = 4 C_f$$

$$f = f(Re, \frac{e}{D})$$

$e =$  rugosidad o aspereza de la pared.





Nota: para flujo laminar:

$$N_z = \frac{R^2}{4\mu} \frac{\Delta(p + \gamma h)}{L} \left[ 1 - \left( \frac{r}{R} \right)^2 \right]$$

$$V = \frac{\int_0^R N_z 2\pi r dr}{\pi R^2}$$

$$f = \frac{64}{Re} \leftrightarrow \tau_w = \mu \frac{8V}{D}$$

Problemas usuales:  
 Datos:  $D, e, F_v, \rho, \mu$   
 Calcular:  $\Delta P$

Definir:  $\Delta H_f = \frac{\Delta(p + \gamma h)}{\gamma} = \Delta \left( \frac{p}{\gamma} + h \right)$

$\Delta H_f = f \frac{L}{D} \frac{V^2}{2g}$

Coef. de fricción de Darcy

Calcular:  $V = \frac{F_v}{\pi \frac{D^2}{4}}$

Si el flujo es laminar, más turbulento puede ser el flujo.

$Re = \frac{VD}{\mu} = \frac{4F_v \rho}{\pi D \mu}$

$Re = 1,5 \cdot 10^5$

$\frac{e}{D} = 0,0006$  de los datos.

$f = 0,02$

Datos:  $D, e, \Delta H_f, \rho, \mu, L$   
 Calcular:  $F_v$

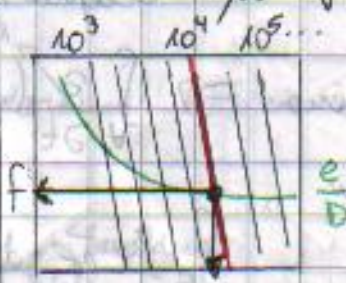
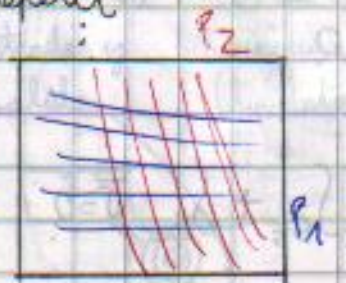
Forma derivada:  $\Delta H_f = f \frac{L}{D} \frac{V^2}{2g}$

Prueba y error: Imponer  $F_v$   
 $\rightarrow$  Calcular  $\Delta H_f$

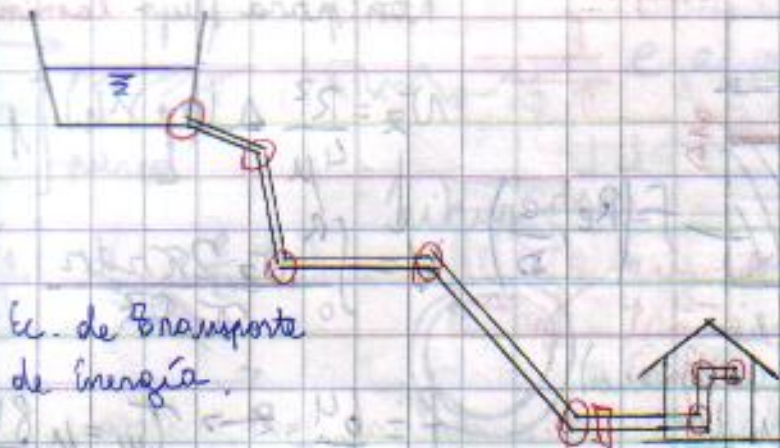
$Re \sqrt{f} = \frac{VD}{\mu} \sqrt{\frac{\Delta H_f D 2g}{L V^2}}$

Calcular los datos

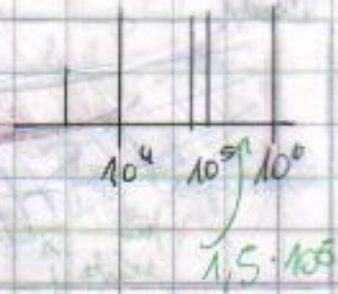
repetir:



$Re \sqrt{f} = Cte$



Ec. de Transporte de Energía



Ec. de la Energía

4-10-2005



Coef. de Fricción

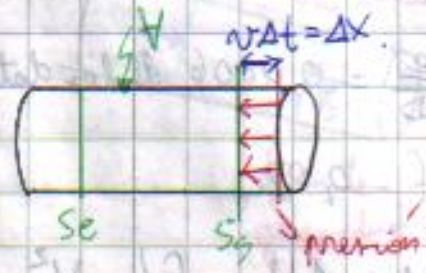
$e = \frac{\text{energía}}{\text{masa}}$

$pe = \frac{\text{energía}}{\text{volumen}}$



$$E = \int_{S_M} pe \, dV$$

$$\frac{DE}{Dt} = \int_V \frac{\partial}{\partial t} (pe) \, dV + \int_S pe \vec{v} \cdot d\vec{A} = 1^{\text{a}} \text{ Ley de Termodinámica}$$



$$> 0 \rightarrow \text{aumento } E = \frac{\Delta C}{\Delta t} - \frac{\Delta W}{\Delta t}$$

en sistema

$> 0 \rightarrow \text{entra al sistema}$

$E$  al sistema

calor que entra al S.M. durante  $\Delta t$

trabajo realizado por S.M. durante  $\Delta t$

Conductor unidimensional: propiedades constantes en una sección transversal del conductor excepto "velocidad" (corrección pequeña).

Flujo estacionario forma de V.

$$\Rightarrow \int_V \frac{\partial}{\partial t} (pe) \, dV = 0$$



$$\int_S pe \vec{v} \cdot d\vec{A} = \int_{S_e} + \int_{S_g} + \int_{S_{sw}} \vec{v} \cdot d\vec{A} = 0$$

$e = e_{\text{potencial}} + e_{\text{cinética}} (+ \text{calor})$

↑  $h$  eje vertical hacia arriba

$$e = gh + \frac{1}{2} v^2 + \mu$$

$$\mu = C_p T$$

$$\Rightarrow \int_S \rho e \vec{v} \cdot d\vec{A} = - \rho_e (gh_e + \frac{1}{2} v_e^2 + \mu_e) F_{ve} + \rho_s (gh_s + \frac{1}{2} v_s^2 + \mu_s) F_{vs}$$

$\alpha \approx 1$ , pero siempre es algo  $> 1$ .

El término  $\Delta W$  en  $S_u$  no hay trabajo ( $\vec{v} = 0$ )



$$\Delta W_{pe} = - \underbrace{P_e}_{\text{fuerza}} \underbrace{A_e V_e \Delta t}_{\text{desplazamiento}} \frac{P_e}{P_e} = - \frac{P_e F_{me} \Delta t}{P_e}$$

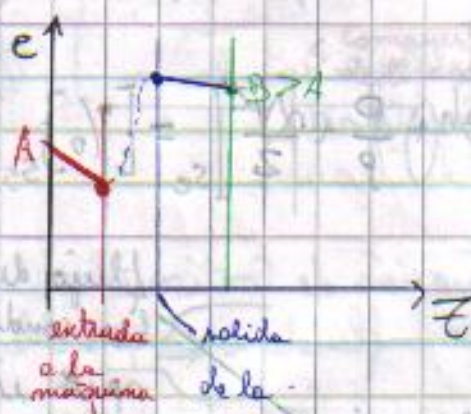
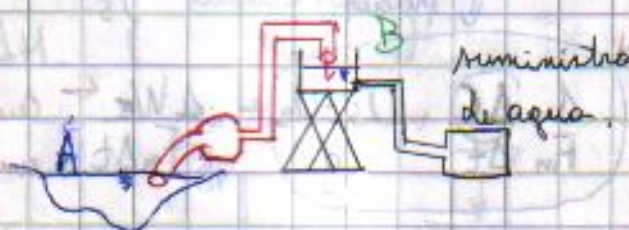
$$\Delta W_{ps} = + \frac{P_s F_{ms} \Delta t}{P_s}$$



la pregunta es: ¿hay más trabajo?

Puede haber máquinas que impulsen al fluido.

caja negra  $\rightarrow$  bombas, ventiladores, compresores, etc.



$$\Delta W = \Delta W_p + \Delta W_e$$

presión en las secciones de entrada y salida

el eje de la máquina (un lado)

ejemplos: turbinas

hidráulica a gas a vapor.

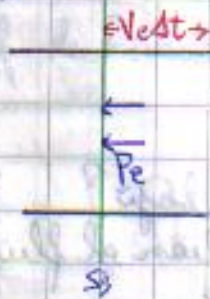
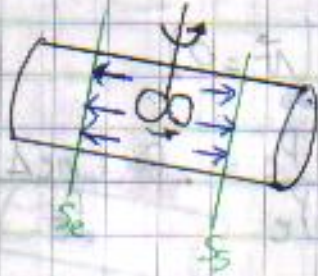


$Re = \frac{\rho V D}{\mu} = 2 \cdot 10^3 \rightarrow$  Define si el fluido es laminar.  $6 \cdot 10^{-2} 2025$

$e = gh + \frac{1}{2} v^2 + \mu \left[ \frac{\text{energía}}{\text{masa}} \right]$

$\left[ gh + \frac{1}{2} \Delta V^2 + \mu \right]_{S_3} - [\%]_{S_2} = \frac{1}{F_m} \frac{\Delta C}{\Delta t} - \frac{1}{F_m} \frac{\Delta W_p}{\Delta t} - \frac{1}{F_m} \frac{\Delta W_e}{\Delta t}$

trabajo de la presión en  $S_2$  y  $S_3$       trabajo al eje de la máquina



Fuerza =  $-P_e A_e$   
 Desplazamiento =  $V_e \Delta t$   
 Trabajo =  $-P_e A_e V_e \Delta t$

$F_m = V A P = \dot{m}$

$\Delta W_p|_{S_2} = -\frac{P_e F_m \Delta t}{P_e}$

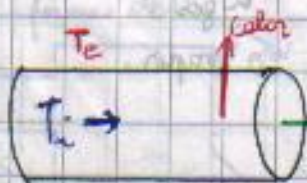
pérdida de energía mecánica      pérdida de energía por fricción

$\Delta W_p|_{S_3} = +\frac{P_s F_m \Delta t}{P_s}$

$\left[ gh + \frac{P}{\rho} + \frac{\alpha V^2}{2} \right]_{S_2} - [\%]_{S_3} = -\frac{1}{F_m} \frac{\Delta C}{\Delta t} + U_s - U_e + \frac{\Delta W_e}{F_m \Delta t}$  Cuando existe una máquina

Aplicaciones usuales

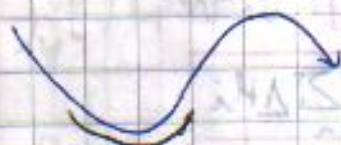
- flujo del fluido (en condiciones aprox. isotérmicas) (transferencia de calor no es importante)
- intercambio de calor entre el fluido y el exterior (fricción mecánica en el fluido no es importante)



$T_i = T_e$   
 calor por fricción  
 $T_i > T_e$

Dividiendo la ecuación por  $g$ :  $h + \frac{P}{\rho g} + \alpha \frac{V^2}{2g} = H =$  suma de Bernoulli

chorro



$$H = \frac{e}{g}$$

$$-\frac{1}{g F_m} \frac{\Delta C}{\Delta t} + \frac{H_s - H_e}{g} = \Delta H \text{ pérdida de energía por fricción} \rightarrow \text{pérdida de carga}$$

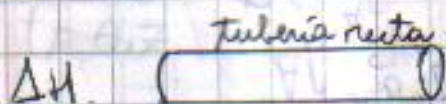
$$\frac{\Delta W_E}{g F_m \Delta t} = H_E \rightarrow H_e - H_s = \Delta H + H_E \text{ pérdida de la energía mecánica}$$

$P_E$  potencia intercambiada entre el fluido y la máquina.

$$P_E = \frac{\Delta W_E}{\Delta t} = |H_E| g F_m$$

$H_E > 0$  cuando el fluido entrega energía a la máquina **TURBINA**

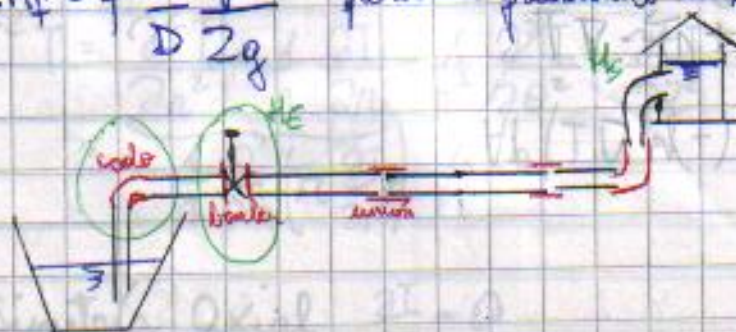
$H_E < 0$  cuando la máquina entrega energía al fluido (bombeo).



le de Darcy

$$\Delta H_f = f \frac{L}{D} \frac{V^2}{2g}$$

pérdida friccional en un tramo recto de tubería





$$\Delta H_f = f \frac{L}{D} \frac{V^2}{2g}$$

$$2) \Delta H = \Delta H_f + \sum_i \Delta H_i$$

$$\Delta H_i = K_i \frac{V^2}{2g}$$

$i = 1, \dots, m$

$K_i$  coef. de la singularidad

18-10-2005

Para Fluidos

# Ecuación General de Transporte de Calor

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_V \rho C_p T dV + \int_S \rho C_p T \vec{v} \cdot d\vec{A} = \int_V \dot{q}_m dV - \int_S \vec{q}_w \cdot d\vec{A}$$



Estacionario :  $\frac{\partial}{\partial t} = 0$

ley de Fourier

$$\vec{q}_w = -k \nabla T$$

Fluido Incompresible :  $\rho = \text{cte}$

Propiedades constantes :  $\int_S \rho C_p T \vec{v} \cdot d\vec{A} = \int_V \nabla \cdot (\rho C_p T \vec{v}) dV$   
respecto a T

$$= \int_V (\rho C_p \vec{v} \cdot \nabla T) dV$$

Problema con la viscosidad :  $\int_S \vec{q}_w \cdot d\vec{A} = \int_V \nabla \cdot \vec{q}_w dV$   
T de Gauss.

Ecuación de Continuidad para fluido incompresible :  $\nabla \cdot \vec{v} = 0$

$$\rho C_p \int_V (\nabla \cdot T \vec{v}) dV$$

$$\nabla \cdot (T \vec{v}) = T \nabla \cdot \vec{v} + \vec{v} \cdot \nabla T$$

LEY DE FOURIER

$$\int_V \nabla \cdot \vec{q}_w dV = \int_V \nabla \cdot (-k \nabla T) dV$$