1. Receta para Resolver un Problema de Programación Dinámica

El enfoque de programación dinámica permite resolver problemas tanto a tiempo continuo como a tiempo discreto cuando consideramos un horizonte temporal infinito. Cuando se trata de un problema en tiempo discreto ésta es la única alternativa. Por otro lado, para resolver problemas en tiempo continuo se puede utilizar tanto el enfoque de programación dinámica, como el de cálculo variacional o el de control óptimo (ver *Notes on Dynamic Optimization* de José De Gregorio).

En esta nota nos enfocamos en resolver (*i.e.* resolver la trayectoria de las variables de decisión) problemas del tipo:

$$\boxed{\text{P}} \qquad \begin{aligned} &\max_{\{c_t\}_{t\geq 0}} \sum_{t\geq 0} \beta^t u(c_t) \\ &k_{t+1} = f(c_t,\, k_t) \quad t \geq 0 \end{aligned}$$

donde k_t denota a la variable de estado y c_t a la variable de control (*i.e.* la variable de decisión).

Receta para resolver $\boxed{\mathbf{P}}$ de PD:

(1) Escribir la función valor:

La función valor refleja el valor asociado a un determinado valor para la(s) variable(s) de estado, en el caso de $\boxed{\text{P}}$:

$$v(k_s) = \sup_{\{c_t\}_{t\geq s}} \sum_{t\geq s} \beta^{t-s} u(c_t)$$

(2) Escribir la Ecuación de Bellman:

La ecuación de Bellman (EB) se deriva a partir del principio de Bellman, que señala que: "Una estrategia óptima tiene la propiedad de que sin importar la decisión y el estado inicial, las decisiones restantes son óptimas dada la primera decisión". En la practica establecer la EB permite reducir la dimension temporal del problema. En otras palabras, podemos omitir los subíndices t y denotamos por x' las variables en el siguiente periodo.Luego, para $\boxed{\text{P}}$ se tendrá que:

$$v(k) = \sup_c [u(c) + \beta v(k')]$$

donde $k' = f(c,\, k)$.

(3) Derivar la(s) C.P.O.('s) asociada(s) a la EB (1 por cada variable de control):

La(s) C.P.O.('s) se obtienen al igualar a cero la derivada de la EB respecto de las variables de control o decisión. Así para el caso de $\boxed{\text{P}}$:

$$\frac{du(c)}{dc} + \beta v'(k')\frac{\partial f(k,\, c)}{\partial c} = 0$$

(4) Establecer el Teorema de la Envolvente:

El Teorema de la Envolvente establece que cuando la función valor es diferenciable, se puede derivar ambos lados de la EB ignorando el efecto de la variable de estado sobre la variable de control. (Lo cual es consecuencia que la variable de control es elegida optimamente, por lo que su derivada es cero.):

$$\frac{dv}{dk} = \beta \frac{dv}{dk'}\frac{dk'}{dk}$$

(5) Resolver

2. **Ejemplo**: <u>Problema de comerse la torta</u>

Encuentre la trayectoria de consumo que resuelve:

$$\begin{array}{lll} \boxed{\text{P}} & & \max\limits_{\{C_t\}_{t\geq 0}} \sum\limits_{t\geq 0} \delta^t u(C_t) \\ & s.a. & \\ & & W_{t+1} = \frac{1}{\delta}(W_t - C_t) \\ & & 0 \leq C_t \leq W_t \\ & & W_0 > 0 \text{ dado} \end{array}$$

Este problema consiste en determinar la senda de consumo óptima para consumir la riqueza inicial W_0, i.e. como comerse la torta de manera óptima y de ahí el nombre. De acuerdo a la receta lo primero es escribir la función valor. Ésta será:

$$v(W_s) = \sup_{\{C_t\}_{t\geq s}} \sum_{t\geq s} \delta^{t-s} u(C_t) \tag{1}$$

Asociada a esta función valor se tiene la ecuación de Bellman:

$$v(W) = \sup_{0\leq C\leq W} [u(C) + \delta v(W')] = \sup_{0\leq C\leq W} [u(C) + \delta v(\frac{1}{\delta}(W - C))] \tag{2}$$

donde ocupamos que $W' = \frac{1}{\delta}(W - C)$. Luego, se derivan las C.P.O.'s. En este caso dado que la única variable de decisión es el consumo, se tendrá una sola.

$$u'(C) + \cancel{\delta} v'(W')(-\frac{\cancel{1}}{\cancel{\delta}}) = 0 \tag{3}$$

Por otra parte del Teorema de la Envolvente se tiene:

$$v'(W) = \cancel{\delta} v'(W')(\frac{\cancel{1}}{\cancel{\delta}}) = v'(W') \tag{4}$$

Adelantando la condición que establece el Teorema de la Envolvente (truco usual) obtenemos que:

$$\begin{align} v'(W') &= v'(W'') \tag{5}\\ &= u'(C') \tag{6}\\ & \tag{7} \end{align}$$

Lo que combinado con la CPO nos permite concluir que:

$$\begin{align} u'(C') &= v'(W'') \tag{8}\\ &= u'(C') \tag{9}\\ & \tag{10} \end{align}$$

La ecuación (9) implica que $C = C'$ ($C_t = C_{t+1}$). De esta forma mediante la resolución por PD encontramos que la solución optima al problema de comerse la torta es elegir el mismo nivel de consumo a través del tiempo. Este resultado de suavización de consumo es muy comun en economia y depende de los supuestos de concavidad de la función de utilidad y de ausencia de incertidumbre implícitos en el problema.