IN826: Tópicos Avanzados en Macroeconomía. *Sem. Primavera 2008.*

Prof.: E. Engel CEA, Universidad de Chile

TAREA 1

Fecha de Entrega: Lunes 11 de Agosto, antes de clases

1. **Políticas (S,s) y el Paradigma del Agente Representativo.**

   Muestre formalmente, mediante un ejemplo adecuado, que el paradigma del agente representativo (Lecture 1) no se cumple cuando los agentes siguen políticas (S,s). Ud. decide si trabaja con políticas (S,s) unilaterlaes o bilaterales, el resultado se cumple en ambos casos.

2. **$\hat{y}$ sigue un AR(1)**

   El proceso de óptimos estáticos, $\hat{y}$, sigue un AR(1):

   $$\hat{y}_{it} = \phi \hat{y}_{i,t-1} + v_{it},$$

   donde los v_{it} son las innovaciones (i.i.d., indep. de $y_{i,t-1}, y_{i,t-2}, \ldots$ y de media nula para simplificar el álgebra).

   a) El agente enfrenta costos de ajuste cuadráticos. Muestre que existen constantes c_1, c_2 y c_3 tales que:

   $$y_{it} = c_1 y_{i,t-1} + c_2 y_{i,t-2} + c_3 v_{it}, \tag{1}$$

   de modo que y sigue un AR(2).

   b) Considere un continuo de agentes que satisface (1) con

   $$v_{it} = v_t + \varepsilon_{it},$$

   donde los v_t son i.i.d., comunes a través de los individuos (shock agregado) y los ε son i.i.d. (en el tiempo y a través de individuos, además de independientes de los v_t). Aplique la Ley de los Grandes Números para mostrar que el agregado y_t, definido como $\sum_{i=1}^{N} y_{it}/N$, sigue un AR(2).

   c) Reconsidere la parte b), pero suponiendo que el ajuste es a la Calvo en lugar de cuadrático.

3. **Ajuste abultado y procesos ARCH**

Uno de los galardoneados con el Premio Nobel de Economía 2003 fue Robert Engle, quien recibió este premio por haber introducido la familia ARCH de series de tiempo. Los procesos ARCH extienden los procesos autoregresivos tradicionales para capturar el hecho que la volatilidad observada de la mayoría de las series financieras varía sistemáticamente a lo largo del tiempo: hay períodos de gran volatilidad seguidos de períodos de baja volatilidad. Los procesos ARCH son procesos autoregresivos, salvo que la varianza de las innovaciones es función de la historia previa de la serie de interés (por ejemplo, una constante mas una combinación lineal de los cuadrados de valores previos de la variable que se está modelando), a diferencia de los procesos AR tradicionales, donde dicha varianza es constante. ARCH se refiere a Auto-Regressive-Conditional-Heteroscedasticity.

En este problema mostramos que en el modelo de Calvo aplicado a un agente la variable x_t, que que corresponde a la "brecha-pre-ajuste", sigue un simple proceso ARCH.

Considere un agente que sigue un modelo de Calvo:

$$\Delta y_t = \xi_t x_t,$$

con

$$x_t \equiv y_t^* - y_{t-1}.$$

Los ξ_t son i.i.d. Bernoulli con probabilidad de éxito λ mientras que los Δy_t^* son i.i.d. con media nula. También tenemos que los ξ_t son independientes de los x_s, $s \leq t$ y de los Δy_s^*, para todo s.

a) Use la intuición (más que las definiciones formales) que motiva al modelo de Calvo para argumentar que:

(i) x_t es independiente de Δy_{t-1}^*

(ii) x_t *no* es independiente de Δy_t^*

b) Exprese x_t como función de ξ_{t-1}, x_{t-1} y Δy_t^*.

c) Use la expresión de a) para mostrar que:

$$x_t = (1-\lambda)x_{t-1} + v_t,$$

con

$$v_t \equiv (\lambda - \xi_{t-1})x_{t-1} + \Delta y_t^*.$$

d) Muestre que v_t no está correlacionada con x_{t-1}.

e) Determine $\mathrm{E}[v_t|I_{t-1}]$, donde $I_{t-1} = \{x_{t-1}, x_{t-2}, ..., \xi_{t-2}, \xi_{t-3}, ..., \Delta y^*_{t-1}, \Delta y^*_{t-2}, ...\}$. Es decir, I_{t-1} incluye todas las variables conocidas antes del ajuste del período $t-1$; en particular no incluye ξ_{t-1}.

f) Determine $\mathrm{Var}[v_t|I_{t-1}]$ y concluya que esta varianza es creciente en x^2_{t-1}, tal como sucede con un proceso ARCH.

g) De una intuición económica para el resultado obtenido en la parte f).