Control 3

12 de Noviembre de 2008

P1 Luego de sus exitosas experiencias como alumno y auxiliar de IN790, Ud. se titula con distinción máxima de `Ingeniero civil matemático e industrial` y de `Magíster en gestión de operaciones`. Dada su creciente fama como experto en procesos estocásticos, Ud. es contratado por una famosísima empresa de retail. En su primer día de trabajo se le pide resolver el siguiente problema:

a) Se necesita estudiar el comportamiento de los clientes cuando compran en alguna de las sucursales de la tienda. Se sabe que los clientes entran a la tienda según un proceso de Poisson de tasa λ y lo primero que hacen es pasar a la sección de `Consultas`, para revisar el cupo restante de crédito que poseen. Para ello consultan al ejecutivo de turno que demora en entregar la información un tiempo exponencial de media $\frac{1}{\mu_0}$ y que atiende en estricto orden de llegada. Cada vez que un individuo sale de `Consultas` se dirige, con probabilidad $p_i,\ i \in \{1, \ldots, N\}$, a alguno de los N departamentos que posee la tienda o se va para su casa con probabilidad $p_s > 0$ ($p_s + \sum_{i=1}^{N} p_i = 1$). Una vez que un cliente entra al departamento i-ésimo, vitrinea, elige su producto y luego paga en caja, atendida por sólo un cajero, cuya tasa de servicio es $\mu_i,\ i \in \{1, \ldots, N\}$. Finalmente, luego de la compra vuelve a revisar el cupo de su crédito en la sección de `Consultas`. Suponga, para su análisis, que se cumplen las condiciones de régimen estacionario.

I. (1 pto) Modele como red de colas, y calcule las tasas efectivas para cada subsistema y encuentre las condiciones de régimen estacionario. Resuma sus resultados en una tabla.

II. (1 pto) Encuentre el tiempo medio que un cliente pasa en la tienda y calcule el tiempo esperado que un cliente pasa por la sección de `Consultas`.

III. (1 pto) Como una medida para mejorar el nivel de servicio, el gerente de cajeros aumentará el sueldo a uno de sus subordinados. Si se beneficia al cajero del departamento i su tasa de servicio cambia a $\widetilde{\mu}_i = \delta\mu_i$, con $\delta > 1$. ¿A qué cajero se le debe aumentar el sueldo si se desea minimizar el tiempo esperado que un cliente pasa en la tienda?.

Ud. encontró el problema anterior muy fome, así que para evitar aburrirse se pone a pensar en un problema aplicado más interesante, que quiere resolver para incluirlo en el `paper` asociado a su tesis.

b) La prestigiosa tienda de cine `APM` está por inaugurar dos nuevas secciones dedicadas exclusivamente a `Wes Anderson` y `Hayao Miyasaki`. Se sabe que los clientes llegan al negocio en un proceso de Poisson de tasa λ, interesados en obtener información de ambos directores de cine. Para atender estas secciones se contrata a dos nuevos empleados. Sin embargo, no está clara la forma de administrar el servicio. Se tiene las siguientes 2 opciones:

`Opción 1:` Existen dos módulos, cada uno atendido por un empleado y especializado sólo en un director. Todos los clientes pasan primero por el módulo 1 y luego continuan al módulo 2. Si el módulo está ocupado los clientes hacen cola hasta que éste se desocupa. Los tiempos de atención de cada módulo son exponenciales, de media $\frac{1}{\mu}$.

`Opción 2:` Existen dos módulos, cada uno atendido por un empleado, los cuales poseen información de ambos directores. Los clientes llegan a la tienda y si no hay módulo libre esperan en una fila única para ambos módulos. Los tiempos de atención son exponenciales de media $\frac{1}{\alpha\mu}$, con $\alpha < 1$, dado que no hay especialización. Se dice que los empleados son `cinéfilos` si $\alpha \geq \frac{1}{2}$.

Sean W_1, W_2 los tiempos esperados de servicio para la `Opción 1` y `Opción 2`, respectivamente.

I. (1 pto) Encuentre W_1 y W_2. Simplifique las expresiones denotando $\rho = \frac{\lambda}{\mu}$.

II. (1 pto) ¿Existe $\alpha^* = \alpha^*(\rho)$ tal que $W_1 = W_2$?. ¿Es único?

III. (1 pto) Pruebe que si $W_2 > W_1$, entonces los empleados no son cinéfilos.

IV. (0.5 ptos) Si los empleados son cinéfilos, ¿qué opción recomendaría Ud. al dueño de la tienda, si se desea minimizar el tiempo de espera de los clientes?.

`Sol:` *a*) El siguiente dibujo muestra la situación:

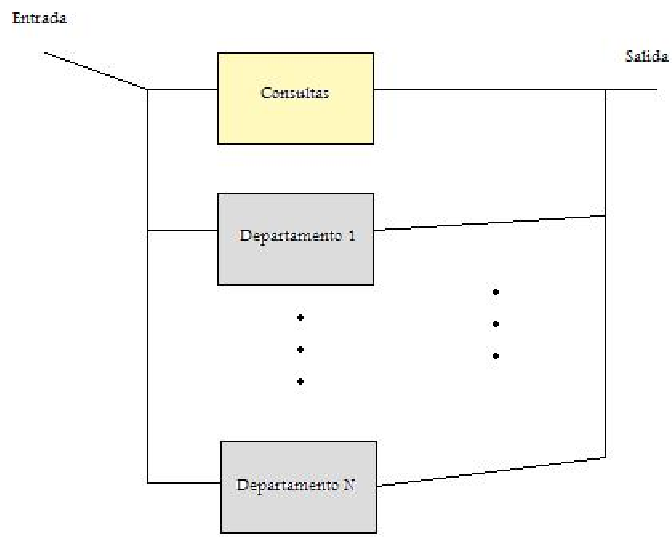

Figura 1: Esquema de la red de la `P1`*a)*

I. Sean λ_0 la tasa de entrada efectiva al módulo de atención y λ_i la tasa de entrada efectiva al departamento i, $\;i = 1, \ldots, N$. Las ecuaciones de conservación de flujo son:

$$\begin{aligned} \lambda_0 &= \lambda + \sum_{i=1}^{N} p_i \lambda_i \\ \lambda_i &= p_i \lambda_0, \; i = 1, \ldots, N \end{aligned}$$

De lo anterior, $\lambda_0 = \frac{\lambda}{p_s}$ y $\lambda_i = \frac{\lambda p_i}{p_s}$, $\forall\, i = 1, \ldots, N$.

En resumen,

Sub-sistema	Tipo	Condición
Consultas	$M/M/1,\, \mu_0$	$\dfrac{\lambda}{p_s} < \mu_0$
Departamento i	$M/M/1,\, \mu_i$	$\dfrac{\lambda p_i}{p_s} < \mu_i$

II. Sea L_i el número esperado de personas en el módulo $i,\ i = 0, \ldots,\ N$. Del formulario (y toda la teoría vista en clases `:P`):

$$L_i = \frac{\rho_i}{1-\rho_i}$$

donde $\rho_i = \frac{\lambda_i}{\mu_i}$.
Con esto el número esperado de personas en el subsistema es:

$$L_T = \sum_{i=0}^{N} L_i$$

por otro lado, usando *Little*, W_T, el tiempo esperado de permanencia en el sistema es:

$$W_T = \frac{L_T}{\lambda}$$

Para calcular W_C, el tiempo esperado de permanencia en el módulo `consultas`, se condiciona con respecto al número de veces que se pasa por `consultas`:

$$W_C = \sum_{k=1}^{\infty} (k \cdot W_0)(1-p_s)^{k-1} p_s = \frac{W_0}{p_s}$$

con $W_0 = \frac{L_0}{\lambda_0}$ el tiempo esperado de permanencia en una visita a `consultas`.
Note que también puede calcular $W_C = \frac{\lambda_0}{\lambda} W_0$.

III. Queremos minimizar W_T. para ello, basta elegir al cajero i^* que L_i^* sea el que más disminuya al recibir el aumento.

Denotemos $\widetilde{L}_i$ al número de esperado de personas si la tasa del cajero i es $\widetilde{\mu}_i$ y sea $\widetilde{\rho}_i = \frac{1}{\delta}\rho_i$. Se tiene:

$$\begin{aligned} \Delta_i &= L_i - \widetilde{L}_i \\ &= \frac{\rho_i}{1-\rho_i} - \frac{\widetilde{\rho}_i}{1-\widetilde{\rho}_i} \\ &= \frac{\delta - 1}{\frac{\delta}{\rho_i} + \rho_i - (\delta+1)} \end{aligned}$$

Como $\left(\frac{\delta}{\rho_i} + \rho_i - (\delta+1)\right)' = 1 - \frac{\delta}{\rho_i^2}$ es negativa, pues $\rho_i < 1$ se concluye que Δ_i es creciente en ρ_i.

Luego, basta elegir i^* tal que

$$i^* = argmax\{\rho_i : i = 1, \ldots, N\}$$

b) I. Usando las conocidas fórmulas y simplificando podemos escribir:

$$\begin{aligned} W_1 &= \frac{1}{\mu(1-\rho)} \\ W_2 &= \frac{1}{\alpha\mu\left(1 - \left(\frac{\rho}{2\alpha}\right)^2\right)} \end{aligned}$$

II. Imponer $W_1 = W_2$ nos lleva a la siguiente ecuación cuadrática en α:

$$\alpha^2 - \left(\frac{1-\rho}{2}\right)\alpha - \left(\frac{\rho}{2}\right)^2 = 0$$

que tiene como soluciones a

$$\alpha^*_{1,2} = \frac{(1-\rho) \pm \sqrt{(1-\rho)^2 + 4\rho^2}}{4}$$

Claramente, sólo una de ellas es positiva, luego el problema tiene solución única.

III. Sea $f(\alpha) = \alpha^2 - \left(\frac{1-\rho}{2}\right)\alpha - \left(\frac{\rho}{2}\right)^2$. Haciendo un poco de algebra se obtiene que:

$$W_2 > W_1 \Leftrightarrow f(\alpha) < 0$$

Así, como f es una parábola convexa se concluye que si $W_2 > W_1$ el α asociado debe ser menor que α^*.

De la parte anterior, con un poco de fe[1], se puede probar que $\alpha^* < \frac{1}{2}$.

Se concluye que $\alpha < \frac{1}{2}$, y por lo tanto, que los empleados no son cinéfilos.

IV. Como los empleados son cinéfilos, es decir, $\alpha \geq \frac{1}{2}$, de la parte anterior se puede deducir que, en este caso, $W_2 \leq W_1$. Por lo que se debe recomendar la `Opción 2`.

P2 Al final de la jornada su jefe lo descubre dedicando su tiempo a actividades ajenas al interés de la empresa, por lo que Ud. es despedido. A pesar de lo anterior, se encuentra feliz, recordando sus tiempos de estudiante, por lo que decide resolver el siguiente ejercicio, que no había podido resolver ni como alumno ni como auxiliar:

a) Considere un sistema $M/M/1$, con tasa de llegada λ y tasa de servicio μ. Sean $\{p_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ las probabilidades estacionarias asociadas y $N_S =$ el número de clientes en servicio (en régimen estacionario).

I. (0.5 ptos) Pruebe que $E(N_S) = 1 - p_0$.

II. (0.5 ptos) Usando la *fórmula de Little* escriba otra expresión para $E(N_S)$ y concluya que $p_0 = 1 - \frac{\lambda}{\mu}$.

Entusiasmado, recuerda un problema que había dejado propuesto en una de las auxiliares que hizo en el semestre pasado, y decide escribir la pauta del mismo, en LaTeX, para enviársela al actual auxiliar del curso. El problema que resolverá es el siguiente:

b) Considere un sistema $M/G/1$, donde el proceso de llegada es Poisson de tasa λ y los tiempos de servicio S son independientes y de distribución común B. Sea X_n la cantidad de personas en el sistema cuando el enésimo cliente se retira, y denote las probabilidades de transición como $p_{ij} = P(X_{n+1} = j | X_n = i)$. Sean π el vector de distribución estacionaria para $P = (p_{ij})$ y $\Pi(z) = \sum_{i=0}^{\infty} \pi_i z^i$ su función generadora, donde $|z| < 1$. Suponga que la distribución en estado estacionario del sistema coincide con la de la cadena subyacente.

Suponga que se cumple:

$$\Pi(z) = \frac{(1-\rho)(1-z)K(z)}{K(z) - z} \qquad (*)$$

donde $\rho = \lambda E(S) < 1$, $k_i = \displaystyle\int_0^\infty \frac{e^{-\lambda t}(\lambda t)^n}{n!} dB(t)$ y $K(z) = \displaystyle\sum_{i=0}^{\infty} k_i z^i$.

[1] De hecho basta usar la *desigualdad triangular*:

$$\sqrt{a^2 + b^2} < a + b \quad a, b > 0$$

I. (1 pto) Muestre que $K'(1) = \rho$.

II. (1 pto) Muestre que $K''(1) = \lambda^2 E(S^2)$

III. (1.5 ptos) Derivando $(*)$, obtenga la fórmula de Pollaczek-Khintchine

$$L = \rho + \frac{\rho^2 + \lambda^2\sigma_S^2}{2(1-\rho)}$$

donde σ_S^2 es la varianza del tiempo de servicio.
Indicación: Le puede ser útil mostrar y usar que $\lim_{z\to 1} \frac{1-z}{K(z)-z} = \frac{1}{1-\rho}$.

IV. (1.5 ptos) Muestre que $W_q = \frac{\lambda E(S^2)}{2(1-\rho)}$ y concluya que la esperanza del tiempo de vida residual de un proceso en servicio es $\frac{\lambda E(S^2)}{2}$.

`Sol:` *a*) I.

$$\begin{aligned} E[N_S] &= E[N_S|N=0]P(N=0) + E[N_S|N>0]P(N>0) \\ &= 0\cdot p_0 + 1\cdot(1-p_0) \\ &= 1-p_0 \end{aligned}$$

II.

$$\begin{aligned} E[N_S] &= L - L_q \\ &= \lambda(W - W_q) \\ &= \frac{\lambda}{\mu} \end{aligned}$$

$$\Longrightarrow p_0 = 1 - \frac{\lambda}{\mu}$$

b) I. De $(*)$

$$\Pi(z)(K(z)-z) = (1-\rho)(1-z)K(z)$$

$$\Longrightarrow \quad \Pi'(z)(K(z)-z) + \Pi(z)(K'(z)-1) = (1-\rho)(-K(z) + (1-z)K'(z))$$

$$\Longrightarrow \quad K'(1) - 1 = (1-\rho)(-1)$$

$$\Longrightarrow \quad K'(1) = \rho$$

II. De la definición de $K(z)$

$$\begin{aligned} K''(1) &= \sum_{i=2}^{\infty} i(i-1)k_i \\ &= \sum_{i=2}^{\infty} i(i-1)\int_0^{\infty} \frac{e^{-\lambda t}(\lambda t)^i}{i!}dB(t) \\ &= \int_0^{\infty} e^{-\lambda t}\sum_{i=2}^{\infty}\frac{(\lambda t)^i}{(i-2)!}dB(t) \\ &= \int_0^{\infty} e^{-\lambda t}(\lambda t)^2\sum_{i=0}^{\infty}\frac{(\lambda t)^i}{i!}dB(t) \\ &= \int_0^{\infty} e^{-\lambda t}(\lambda t)^2 e^{\lambda t}dB(t) \\ &= \lambda^2\int_0^{\infty} t^2 dB(t) \\ &= \lambda^2 E[S^2] \end{aligned}$$

III. De $(*)$

$$\Pi'(z)=\frac{(1-\rho)\left[(-K(z)+(1-z)K'(z))(K(z)-z)-(1-z)K(z)(K'(z)-1)\right]}{(K(z)-z)^2}$$

Usando l'Hôpital

$$\lim_{z\to 1}\Pi'(z)=\lim_{z\to 1}\frac{(1-\rho)\left[(-K(z)+(1-z)K'(z))(K(z)-z)-(1-z)K(z)(K'(z)-1)\right]}{(K(z)-z)^2}$$

$$=\lim_{z\to 1}\frac{(1-\rho)\left[(-K'(z)-K'(z)+(1-z)K''(z))(K(z)-z)+(-K(z)+(1-z)K'(z))(K'(z)-1)\right]}{2(K(z)-z)(K'(z)-1)}$$

$$+\frac{(1-\rho)\left[K(z)(K'(z)-1)-(1-z)K'(z)(K'(z)-1)-(1-z)K(z)K''(z)\right]}{2(K(z)-z)(K'(z)-1)}$$

Notando que $\Pi'(1)=L$ y simplificando

$$\frac{2L}{1-\rho}=\lim_{z\to 1}\frac{-2K'(z)+(1-z)K''(z)}{K'(z)-1}-\frac{(1-z)K(z)K''(z)}{(K(z)-z)(K'(z)-1)}$$

$$=\frac{-2\rho}{\rho-1}+\frac{\lambda^2E(S^2)}{(1-\rho)^2}$$

puesto que

$$\lim_{z\to 1}\frac{K(z)-z}{1-z}=\lim_{z\to 1}-\frac{K(z)-K(1)}{z-1}+1=-K'(1)+1=1-\rho>0$$

Recordando que $Var(S)=E(S^2)-E(S)^2$, concluimos que

$$L=\rho+\frac{\rho^2+\lambda^2\sigma_S^2}{2(1-\rho)}$$

IV. Usando $L=\lambda W$

$$W=\frac{\rho}{\lambda}+\frac{\frac{\rho^2}{\lambda}+\lambda\sigma_S^2}{2(1-\rho)}=E(S)+\frac{\lambda E(S^2)}{2(1-\rho)}$$

Luego

$$W_q=\frac{\lambda E(S^2)}{2(1-\rho)}$$

Por otro lado

$$W_q=E(S)L_q+E(R)=E(S)\lambda W_q+E(R)=\rho W_q+E(R)$$

Luego

$$E(R)=W_q(1-\rho)=\frac{\lambda E(S^2)}{2}$$