Clase Auxiliar 10

4-5 de Noviembre de 2008

P1 Una fina joyería que recibe infrecuentes pero caros pedidos utiliza la siguiente política de inventario. Mantiene un stock de seguridad de S y cada vez que recibe un pedido por una unidad (demanda de un cliente), pone una orden en el taller para producir otra unidad. Los pedidos se distribuyen Poisson de tasa λ y el tiempo que demora la fabricación de una unidad se distribuye exponencial de media $1/\mu$.

Además existe un costo por tener inventario (costo de oportunidad) de h [$] por unidad por unidad de tiempo y un costo por no tener unidades disponibles en el momento que un cliente lo requiera (si el stock cayó a cero) igual a p [$]. Se supone que los clientes que hacen un pedido pero que encuentran que no hay ninguna unidad inmediatamente disponible, esperan a que lleguen las unidades pedidas al taller. Es decir, el costo p [$] es un descuento fijo que se le hace al cliente por hacerlo esperar.

Sea z el nivel de inventario en estado estacionario, que es positivo cuando hay unidades en la joyería y negativo cuando sólo hay unidades en pedido al taller[1]. Denotamos $p(z)$ la probabilidad de que el inventario sea z.

a) Calcule en función de z y $p(z)$, el costo esperado de inventario por unidad de tiempo.

b) Calcule en función de z y $p(z)$, el costo esperado por unidad de tiempo debido a la espera impuesta a los clientes.

c) Entregue una expresión, en función de z y $p(z)$, para el costo total esperado por unidad de tiempo ($E(C)$).

Si determinamos $p(z)$ podríamos determinar $E(C)$ en función de S, que es la variable de decisión.

d) Para ello, en primer lugar, muestre la relación entre z y n, en que n es el número de órdenes procesándose en el taller. Por lo tanto, relacione $p(z)$ con p_n.

e) Muestre que p_n son las probabilidades estacionarias de una cola $M/M/\infty$, si se considera el proceso de pedidos al taller como una cola. Explicite los procesos de llegada y atención de este proceso y calcule las probabilidades estacionarias.

f) Con lo obtenido en las partes anteriores, formule el problema de optimización que le permita encontrar el valor óptimo de S.

Sol: *a*) El costo esperado de inventario es:

$$C_{inv} = \sum_{z=1}^{S} h \cdot z \cdot p(z)$$

pues, por la dinámica del negocio $p(z) = 0, \ \forall \ z > S$.

b) El costo esperado debido a la espera de los clientes es:

$$C_{esp} = \sum_{z=-\infty}^{-1} p \cdot |z| \cdot p(z)$$

pues $|z|$ representa el número de clientes que tuvo que esperar.

[1] z lo interpretamos como $S - n$, con n = número de clientes que llegaron al negocio

c) El costo total queda:

$$E(C) = C_{inv} + C_{esp}$$

d) Por la interpretación que damos a z es claro que:

$$p(z) = \begin{cases} p_{S-z}, & \text{si } z \leq S \\ 0, & \text{si no} \end{cases}$$

e) En el taller se forma una cola $M/M/\infty$, con tasa de llegada λ y tiempo medio de atención $\frac{1}{\mu}$, pues todos los clientes que llegan al negocio causan un pedido al taller.

Por lo anterior, las probabilidades estacionarias son las asociadas a una cola $M/M/\infty$, queda propuesto escribir la fórmula (mire el formulario oficial del $C3$, que debería estar el lunes o martes).

f) Con todos los datos anteriores el problema se escribe:

$$\min_{S \geq 0} \left\{ \sum_{z=1}^{S} h \cdot z \cdot p_{S-z} + \sum_{z=-\infty}^{-1} p \cdot |z| \cdot p_{S-|z|} \right\}$$

P2 Dos tipos de clientes llegan al banco Armijo Eduars según procesos de Poisson de tasas λ_1 y λ_2 [clientes/hora], respectivamente. Los clientes tipo 1 entran al banco dirigiéndose a la zona de Banco en Línea a revisar su estado de cuenta, la cual se puede modelar con capacidad ilimitada de servidores. Por otro lado, los tipo 2, entran al banco a la sección de Cajas, la cual es atendida por 2 cajeros en paralelo. Suponga que en este lugar hay capacidad ilimitada para clientes esperando, los cuales forman una cola única hasta ser atendidos.

Los clientes que revisaron su estado de cuenta en la zona de Banco en Línea, luego de terminada su transacción, con probabilidad q se dirigen a la zona de Cajas y con probabilidad $(1-q)$ se retiran del recinto. Luego de ser atendidos por alguno de los cajeros **estos clientes** se retiran del banco.

Por otro lado, para los clientes que ingresaron al sistema directamente a la zona de Cajas, luego de realizada su atención con alguno de los cajeros existen tres posibilidades. Con probabilidad r vuelven a ponerse en la fila de las Cajas debido a que olvidaron realizar alguna transacción. Con probabilidad s se dirigen a la zona de Atención al Cliente, la cual es atendida por un único funcionario y cuenta con capacidad ilimitada para clientes esperando. Por último con probabilidad t se retiran del sistema $(r + s + t = 1)$.

Los clientes que ingresan a la zona de Atención al Cliente, luego de su atención abandonan el banco.

Según datos históricos se sabe que el tiempo que demora un cliente revisando su estado de cuenta en la sección Banco en Línea es una v.a exponencial de media $1/\mu_1$[horas], y el tiempo de atención de cada cajero es una variable exponencial de media $1/\mu_2$[horas]. Sin embargo, no se cuenta con información sobre el tiempo de atención del funcionario en la zona de Atención al Cliente, pero se sabe que sigue una distribución exponenencial de parámetro μ_3 desconocido, y que una fracción K del tiempo este funcionario está ocupado atendiendo público.

a) (1.5 pts) Modele la situación descrita como un sistema de colas. Encuentre las tasas efectivas de entrada a cada subsistema e indique las condiciones de existencia régimen estacionario. Resuma sus resultados en una tabla.

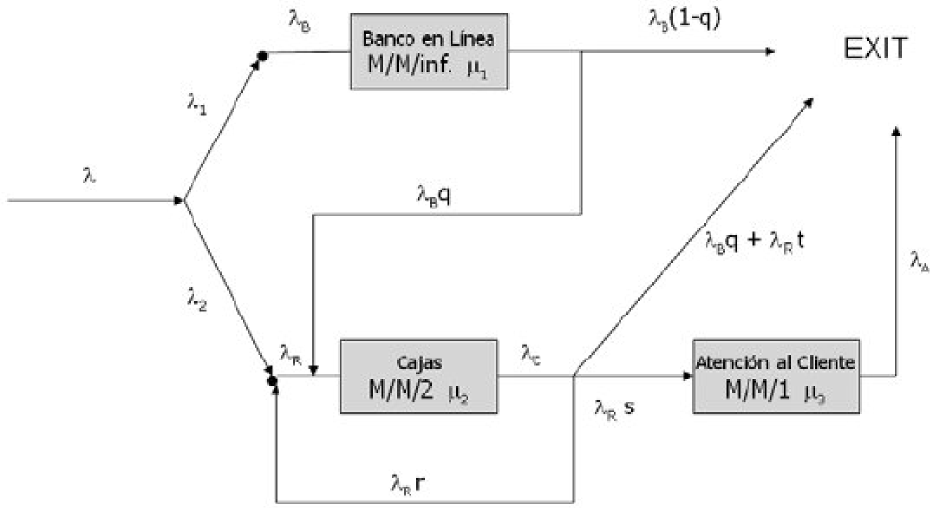
b) (1.0 pts) En función de los datos del problema determine el parámetro de la distribución exponencial del tiempo de atención del funcionario de Atención al Cliente.

c) (1.0 pts) Calcule los tiempos promedio de permanencia en cada subsistema, y en función de dichos valores entregue una expresión para la esperanza del tiempo que permanece un cliente dentro del banco, si ingresó al sistema dirigiéndose a la zona de Cajas.

d) (1.0 pts) Suponga que Armijo quiere disminuir al mínimo posible el tiempo promedio de permanencia de los clientes en el banco. Para esto, evalúa el aumento de la cantidad de cajeros. Entregue una cota superior, lo más pequeña posible, para la disminución del tiempo promedio total que se puede lograr.

e) (1.5 pts) El dueño del banco quiere reducir a la mitad la fracción de clientes que actualmente llegan a la zona de Atención al Cliente y deben esperar antes de su atención. Entregue una expresión que le permita determinar con cuántos funcionarios debe contar como mínimo para lograr este objetivo. Si se decide agregar la cantidad de funcionarios obtenida en este punto, ¿cambia la condición de régimen estacionario de la parte 1?

`Sol:` *a*) El sistema se muestra en la siguiente figura.



Donde la tasa λ_R representa a los clientes que entran a las Cajas y pueden entrar al reflujo y es igual a:

$$\lambda_R = \frac{\lambda_2}{1-r}$$

De esta forma se tiene que las tasas efectivas y las condiciones de régimen estacionario son las siguientes:

Sistema	Tasa Efectiva	Valor	CRE
Banco en Línea	λ_B	λ_1	Siempre $\exists$
Cajas	λ_C	$\lambda_1 q + \frac{\lambda_2}{1-r}$	$\lambda_C < 2\mu_2$
Atención al Cliente	λ_A	$\frac{\lambda_2 s}{1-r}$	$\lambda_A < \mu_3$

Todas estas tasas $\lambda_A, \lambda_B, \lambda_C, \lambda_R$ se encuentran imponiendo conservación del flujo:

"Lo que entra es igual a lo que sale"

b) Para determinar la tasa de atencion μ_3 debemos centrarnos en el sistema de Atención al Cliente. A dicho subsistema llegan clientes con tasa λ_A, y además sabemos que el K del tiempo el bombero está ocupado, es decir, en el largo plazo se tiene que $p_0 = 1 - K$, para la siguiente cadena.

Además, usando que $p_0 = 1 - \rho$ para sistemas $G/G/1$ se tiene que:

$$p_0 = 1 - \frac{\lambda_A}{\mu_3} = 1 - K$$

$$\Longrightarrow \mu_3 = \frac{\lambda_A}{K}$$

c) Usando las conocidad fórmulas para sistemas $M/M/c$ y $M/M/\infty$, los tiempos medios de espera en cada subsistema son:

$$W_B = \frac{1}{\mu_1} \qquad W_C = \frac{2\rho_C}{\mu_2(1-\rho_C^2)} \quad W_A = \frac{\rho_B}{\mu_3(1-\rho_B)}$$

donde $\rho_C = \frac{\lambda_C}{2\mu_2}$ y $\rho_A = \frac{\lambda_A}{\mu_3}$

Luego la esperanza del tiempo que permanece un automóvil dentro de la estación, si ingresó al sistema por el Cajas está dada por:

$$E_C = \sum_{i=1}^{\infty}(iW_C)r^{i-1}t + \sum_{i=1}^{\infty}(iW_C + W_A)r^{i-1}s$$

Note que estamos condicionando en el número de veces que el cliente vuelve entrar a cajas y si el cliente sale del banco desde cajaso desde atención al cliente.

d) El tiempo medio total de permanencia en el sistema, se puede obtener utilizando Little:

$$W_T = \frac{L_T}{\lambda_1 + \lambda_2}$$

Donde $L_T = L_B + L_C + L_A$, y:

$$L_B = \frac{\lambda_B}{\mu_1} \qquad L_C = \frac{2\rho_C}{(1-\rho_C^2)} \quad L_A = \frac{\rho_B}{(1-\rho_B)}$$

Luego, si se busca minimizar el tiempo de espera en las Cajas, el caso extremo es cuando este subsistema se transforma en un autoservicio ($M/M/\infty$, tiempo de espera en la cola nulo!) donde se tendría que que $L'_C = \frac{\lambda_C}{\mu_2}$.
Con este valor, es posible calcular nuevos L'_T y y W'_T, y la cota pedida es:

$$\mathsf{Cota} = W_T - W'_T$$

OBS: también se puede calcular W_T calculando el tiempo esperado de permanencia en el banco de un cliente que entra banco en línea y usar el resultado de la parte anterior.

e) Actualmente la fracción de clientes que llega a Atención al Cliente y debe esperar, es igual a la fracción del tiempo que el funcionario está ocupado, es decir, $(1 - p_0) = K$.

Al agregar más funcionarios el sistema sería de la forma $M/M/c$, luego debemos determinar el mínimo número entero c tal que:

$$\sum_{i=c}^{\infty} p_i \leq \frac{K}{2}$$

Es decir, que la probabilidad de encontrar al funcionario ocupado sea menor que $\frac{K}{2}$.

Además, las probabilidades estacionarias están dadas por las de un sistema $M/M/c$:

$$p_n = \begin{cases} \frac{\lambda_A^n}{n!\mu_3^n} p_0, & 1 \leq n < c \\ \frac{\lambda_A^n}{C!C^{n-C}\mu_3^n} p_0, & n \geq c \end{cases}$$

y que $\sum_{i=0}^{\infty} p_i = 1$.

P3 Bajo el mismo sistema de la P2, Armijo Eduars quiere centrar su atención en lo ocurrido en las Cajas. Para ello, desea comparar su actual configuración de 2 cajeros y una fila única con las 3 alternativas siguientes:

a. Una cola única con un servidor con tiempo de atención exponencial de media $\frac{1}{2\mu_2}$ [minutos].
b. Dos colas independientes cada una con un cajero, con tiempos de atención exponenciales de media $1/\mu_2$ [minutos] para cada uno de ellos. Los clientes eligen equiprobablemente cualquiera de las colas y no es posible el cambio de cola.
c. Dos colas independientes cada una con un servidor, con tiempos de atención exponenciales de media $1/\mu_2$ [minutos] para cada uno de ellos. Los clientes entran a la cola más corta, ante empates eligen equiprobablemente y, se cambian de cola si al irse a la otra fila hay menos personas delante de él.

a) (2.0 pts) Analíticamente, ordene las cuatro configuraciones posibles en términos del tiempo medio de permanencia de los clientes en el sistema, de modo de recomendar al dueño del banco la más eficiente en este sentido. Indique las condiciones de régimen estacionario para cada caso, y al momento de realizar el análisis suponga que estas condiciones se satisfacen.

b) (2.0 pts) Armijo acepta la recomendación hecha por ud. , pero le plantea la siguiente inquietud. "*Creo que al tener menor tiempo en el sistema de Cajas, la zona Atención al Cliente puede colapsar, para esto propongo realizar una campaña de información a mis clientes con la cuál pretendo disminuir la probabilidad s con la que los clientes de las Cajas se dirigen a este zona, o bien aumentar la cantidad de servidores en la sección de Atención al Cliente*". ¿Es fundada la preocupación de A. Eduars? De ser así, ¿cuál de las dos soluciones le parece más efectiva?. Justifique su respuesta.

c) (2.0 pts) Debido a la brillante gestión de Armijo, se pronostica que para el próximo año la tasa de llegada de clientes al banco se duplicará para ambos tipos de clientes. Debido a que una parte importante de esta demanda será de clientes nuevos, se estima que existirá una fracción v de personas que luego de salir de la sección de Atención al Cliente, volverán a ponerse en la fila del mismo sistema, debido a su inexperiencia en el uso de los servicios del banco. Considerando como base la situación inicial del problema 1, entregue una expresión que le permita determinar con cuantos funcionarios debe contar como mínimo en la sección de Atención al Cliente, para que el sistema no colapse.

`Sol:` *a)* Para esta primera parte debemos obtener el tiempo de espera de las cuatro configuraciones:

- Política Actual: Este sistema se trata de una cola M/M/2 con $\rho = \frac{\lambda_C}{2\mu_2}$. Para dicho sistema se tiene que:

$$L_{act} = \frac{2\rho}{1-\rho^2} \qquad W_{act} = \frac{2\rho}{1-\rho^2} \cdot \frac{1}{\lambda_C}$$

- Política a: Corresponde a una $M/M/1$ con $\rho = \frac{\lambda_C}{2\mu_2}$. Luego:

$$L_a = \frac{\rho}{1-\rho} \qquad W_a = \frac{\rho}{1-\rho} \cdot \frac{1}{\lambda_C}$$

- Política b: Este caso corresponde a dos colas $M/M/1$ con $\rho = \frac{\lambda_C}{2\mu_2}$ cada una. Para ver el tiempo promedio de los clientes en el sistema, nos centramos en una de ellas[2]:

$$L_b = \frac{\rho}{1-\rho} \qquad W_b = \frac{\rho}{1-\rho} \cdot \frac{2}{\lambda}$$

- Política c: En esto punto, basta con notar que esta configuración, en términos de medidas de efectividad, es equivalente a la política actual. Aunque puede ser que los clientes se atiendan en otro orden las configuraciones son equivalentes. La idea intuitiva de esto es que en la Política c, si hay n clientes cada una de las colas tendrá $\frac{n}{2}$ clientes que se atenderán en un tiempo $\frac{1}{\mu_2}$, en cambio, en el sistema actual, la cola tiene n clientes que se atienden en un tiempo $\frac{1}{2\mu_2}$, por lo que el mayor número de clientes en una cola se compensa en una atención más rápida.

[2]Este argumento es válido porque la elección de las colas es equiprobable y las 2 colas son del mismo tipo. Para ser un poco más rigurosos se debería calcular esperanza de un cliente condicionando en que tipo de cola elige.

Luego:

$$W_c = W_{act}$$

De lo anterior se tiene que:

$$W_c = W_{act} = \frac{1}{1+\rho} W_b \qquad W_b = 2W_a \qquad W_c = W_{act} = \frac{2}{1+\rho} W_a$$

De lo que se concluye que:

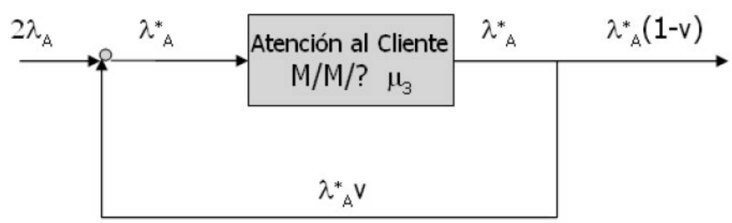
$$W_b > W_{act} = W_c > W_a$$

Luego la política más eficiente es la Política a.

b) A pesar de que disminuya el tiempo de espera en el sistema de Cajas, esto no afecta las tasas efectivas de este sistema y por ende tampoco las tasas efectivas del sistema de Atención al Cliente, luego si con la Política actual el sistema no colapsa las inquietud de Armijo es infundada, y las propuestas de mejora son absolutamente innecesarias.

Las tasas efectivas no cambian porque en su cálculo no intervienen los tiempos de servicio, sólo conservaciones de flujo.

c) Aislando el sistema de Atención al Cliente, la nueva situación es la siguiente:



Note que la tasa de los clientes que se dirigen desde cajas a atención al cliente es el doble de la anterior, es decir, es $2\lambda_A$.

Por conservación del flujo se puede calcular:

$$\lambda_A^* = \frac{2\lambda_A}{1-v}$$

Luego, si se se tienen c funcionarios en este sistema para que el sistema no colapse se debe tener que:

$$\lambda_A^* < c\mu_3$$

Se debe encontrar el mínimo valor de c que satisfaga esta condición, ie, $c = \left\lceil \frac{\lambda_A^*}{\mu_3} \right\rceil$.

Gustavo Angulo gangulo@dim.uchile.cl

Diego Morán dmoran@dim.uchile.cl