FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICAS Y MATEMÁTICAS UNIVERSIDAD DE CHILE

IN790: Modelos Estocásticos en Sistemas de Ingeniería
Profesor : Raúl Gouet
Auxiliares : Gustavo Angulo, Diego Morán

Clase Auxiliar 2

13 de Agosto de 2008

P1 *a*) Pasajeros llegan a un estación de Metro según un proceso de Poisson de tasa $\lambda[pers/hr]$. El tiempo entre los arribos de los trenes es de $t[hrs]$ y su capacidad es tal que puede llevar a todos los pasajeros esperando. Si acaba de pasar un tren y la estación está vacía:

1) Calcule la esperanza de la suma de los tiempos de espera de los pasajeros que subirán al siguiente tren.
2) ¿Cómo cambia su respuesta de la parte anterior si los trenes llegan a la estación según un Proceso de Poisson de tasa μ[trenes/hora]?

b) Clientes llegan a un banco como un proceso de Poisson de tasa $\lambda[personas/hora]$. Suponga que 2 clientes llegaron durante la primera hora.

1) ¿Cuál es la probabilidad de que ambos hayan llegado en los primeros 20 minutos?
2) ¿Cuál es la probabilidad de que al menos uno de ellos haya llegado durante los primeros 20 minutos?

Sol: *a*) 1) Sea t_i el instante de la llegada del i-ésimo pasajero antes de la llegada del siguiente tren. Luego la esperanza pedida corresponde a: $E\left[\sum_{i=1}^{N(t)}(t-t_i)\right]$

Dado que esta esperanza depende de la variable aleatoria $N(t)$ que representa la cantidad de personas que llegan hasta el instante t, se debe condicionar con respecto a esta variable y luego descondicionar. Luego se tiene que:

$$\begin{aligned}
E\left[\sum_{i}^{N(t)}(t-t_i)\right] &= \sum_{n=0}^{\infty} E\left[\sum_{i=1}^{N(t)}(t-t_i)|N(t)=n\right]\cdot P[N(t)=n] \\
&= \sum_{n=0}^{\infty}\left(E\left[\sum_{i=1}^{N(t)} t|N(t)=n\right] - E\left[\sum_{i=1}^{N(t)} t_i|N(t)=n\right]\right)\cdot P[N(t)=n] \\
&= \sum_{n=0}^{\infty}\left(E\left[\sum_{i=1}^{n} t|N(t)=n\right] - E\left[\sum_{i=1}^{n} t_i|N(t)=n\right]\right)\cdot P[N(t)=n]
\end{aligned}$$

En la expresión anterior t es una constante, por lo que $E\left[\sum_{i=1}^{n} t|N(t)=n\right]=nt$. Por otro lado los tiempos t_i se distribuyen uniformes en el intervalo $[0,t]$, por lo que $E\left[\sum_{i=1}^{n} t_i|N(t)=n\right]=\frac{nt}{2}$. Finalmente el término $P[N(t)=n]$ corresponde a la definición de un proceso de Poisson.

$$E\left[\sum_{i}^{N(t)}(t-t_i)\right] = \sum_{n=0}^{\infty}\left(nt-\frac{nt}{2}\right)\cdot\frac{(\lambda t)^n e^{-\lambda t}}{n!} = \frac{t}{2}\sum_{n=0}^{\infty} n\frac{(\lambda t)^n e^{-\lambda t}}{n!} = \frac{\lambda t^2}{2}$$

2) En la parte 1 se calculó la esperanza pedida dado un tiempo entre trenes conocido igual a t. Dado que los trenes llegan a la estación según un Proceso de Poisson de tasa μ[trenes/hora], el tiempo entre llegadas sigue una distribución exponencial de parámetro μ. Luego descondicionando el resultados de la parte anterior, se tiene que la esperanza pedida es:

$$\int_0^{\infty}\frac{\lambda t^2}{2}\mu e^{-\mu t}dt$$

b) Sea $N(t)$ la cantidad de clientes que han llegado al banco hasta el instante t. Dado que se registraron 2 llegadas en un hora de operación, el instante de cada una de esas llegadas se distribuye Uniforme en el intervalo de una hora. Luego:

1) $P[N(\frac{1}{3}) = 2|N(1) = 2] = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{9}$
2) $2 \cdot P[N(\frac{1}{3}) = 1|N(1) = 2] + P[N(\frac{1}{3}) = 2|N(1) = 2] = 2 \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3} + \frac{1}{9} = \frac{5}{9}$

P2 Sea $\{N(t), t \geq 0\}$ un proceso de Poisson de tasa λ. Calcular $E[N(t) \cdot N(t+s)]$.

Sol:

$$\begin{aligned} E[N(t) \cdot N(t+s)] &= E[N(t)(N(t+s) - N(t) + N(t))] \\ &= E[N(t)(N(t+s) - N(t))] + E(N^2(t)) \\ &= E(N(t))E(N(s)) + E(N^2(t)) \\ &= \lambda^2 st + \lambda t + \lambda^2 t^2 \end{aligned}$$

P3 Autos pasan por una calle de acuerdo a un proceso de Poisson de tasa $\lambda[auto/min]$. Una persona que quiere cruzar dicha calle espera hasta que ve que ningún vehículo pasará en los próximos $T[min]$. Encuentre el tiempo esperado que la persona espera antes de cruzar la calle. (Note por ejemplo que si ningún auto pasará en los primeros T minutos el tiempo de espera es 0).

Sol: Sea X el tiempo al que viene el próximo vehículo desde que la persona intenta cruzar la calle. Se tiene:

$$E(T_{esp}) = \int_0^{\infty} E(T_{esp}|X = x)\lambda e^{-\lambda x} dx = \int_0^T [x + E(T_{esp})]\lambda e^{-\lambda x} dx$$

Despejando $E(T_{esp})$ y desarrollando las integrales se llega a que:

$$E(T_{esp}) = \frac{e^{\lambda T}}{\lambda} - \frac{1}{\lambda} - T$$

Observación:

$$\lim_{\lambda \to +\infty} E(T_{esp}) = +\infty$$

Vemos entonces que si λ tiende a infinito, es decir, si los autos pasan muy seguido, entonces el tiempo de espera tiende a infinito.

$$\begin{aligned} \lim_{\lambda \to 0^+} E(T_{esp}) &= \lim_{\lambda \to 0^+} \frac{e^{\lambda T} - 1}{\lambda} - T \\ &= \lim_{\lambda \to 0^+} T \frac{e^{\lambda T} - 1}{\lambda T} - T \\ &= T \cdot 1 - T \\ &= 0 \end{aligned}$$

En este caso, si λ tiende a cero, es decir, si casi no pasan autos, entonces el tiempo de espera tiende a cero.

P4 Considere un puerto al que llegan barcos de M países diferentes. La llegada de barcos provenientes del país i sigue un Proceso de Poisson de tasa λ_i. Después de descargar en el puerto, cada barco que viene del país i, independiente de todo el resto, seguirá viaje al país j con una probabilidad P_{ij}. Sea $N_j(t)$ el número de barcos que han zarpado desde el puerto rumbo al país j hasta el instante t. Suponiendo que el tiempo que tardan los barcos en descargar una vez que llegan al puerto es despreciable, entregue expresiones para $P[N_j(t) = k]$ y la esperanza de $N_j(t)$.

Sol: Sea $N_{ij}(t)$ el número de barcos que vienen del país i y viajan hacia el país j, hasta el instante t. Por la propiedad de división de Poisson $N_{ij}(t)$ es también un Proceso de Poisson con tasa $\lambda_i P_{ij}$ y todos los $N_{ij}(t)$ son independientes. Luego, se tiene que:

$$N_j(t) = \sum_i N_{ij}(t)$$

Por lo propiedad de composición de Poisson la variable $N_j(t)$ es Proceso de Poisson con tasa $\sum_i \lambda_i P_{ij}$:

$$P[N_j(t) = k] = \frac{(\sum_i \lambda_i P_{ij} t)^k e^{-\sum_i \lambda_i P_{ij} t}}{k!} \qquad E[N_j(t)] = \sum_i \lambda_i P_{ij} t$$

P5 Suponga que autos entran en el kilómetro 0 a una carretera de una dirección en infinita según un proceso de Poisson de tasa λ. El auto i que entra escoge una velocidad constante $V_i[kms/hr]$ a la cual viajar. Suponga que las velocidades V_i son variables aleatorias, independientes, positivas y de distribución común F. Encuentre el número esperado de autos que se encuentran entre los kilómetros a y b ($a < b$) de la carretera en el instante t (medido en horas). Suponga que los autos se adelantan unos a los otros sin pérdida de tiempo.

Sol: Digamos que un auto es de tipo I, si estará entre los kilómetros a y b en el instante t.
Un auto que entra a la carretera en un instante s ($s < t$) será de tipo I si su velocidad V es tal que $a < V \cdot (t - s) < b$. Por lo tanto será de tipo 1 con probabilidad:

$$\begin{aligned} P_1(s) &= P\left[\frac{a}{t-s} < V < \frac{b}{t-s}\right] \\ &= F\left(\frac{b}{t-s}\right) - F\left(\frac{a}{t-s}\right) \end{aligned}$$

Utilizando la proposición de proceso de Poisson filtrado se tiene que el número de autos entre los kilómetros a y b en el instante t es Poisson de Media:

$$\lambda t \int_0^t P_1(s) \frac{ds}{t} = \lambda \int_0^t \left[F\left(\frac{b}{t-s}\right) - F\left(\frac{a}{t-s}\right)\right] ds$$

Gustavo Angulo
gangulo@dim.uchile.cl

Diego Morán
dmoran@dim.uchile.cl