Clase Auxiliar

26 de Noviembre de 2008

Para toda la clase, denotamos $\{B_t\}_{t\geq 0}$ un movimiento Browniano estándar.

P1 Para cualquier $\theta > 0$ de define el proceso escalado $\{X_t\}_{t\geq 0}$ como $X_t = \frac{1}{\sqrt{\theta}}B_{\theta t}$. Muestre que X_t es un movimiento Browniano estándar.

Sol: Una forma de ver esto es encontrar la distribución de X_t

$$\begin{aligned}
F_{X_t}[x] &= P[\frac{1}{\sqrt{\theta}}B_{\theta t} \leq x] \\
&= P[B_{\theta t} \leq \sqrt{\theta}x] \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi\theta t}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{u^2}{2\theta t}}du \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi t}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{u'^2}{2t}}du'
\end{aligned}$$

donde en la última ecuación se realizo el cambio de variables $u = u' \cdot \sqrt{\theta}$

Vemos que efectivamente X_t es un proceso gaussiano. Ahora corroboraremos que la matriz de covarianzas se encuentra bien definida (es directo ver que $E[X_t] = 0$)

$$\begin{aligned}
Cov(X_t, X_s) &= Cov(\frac{1}{\sqrt{\theta}}B_{\theta s}, \frac{1}{\sqrt{\theta}}B_{\theta s}) \\
&= \frac{1}{\theta}\cdot Cov(B_{\theta t}, B_{\theta s}) \\
&= \frac{1}{\theta}\cdot \text{mín}\{\theta t, \theta s\} \\
&= \text{mín}\{t, s\}
\end{aligned}$$

P2 Sea $\tau_a = \text{ínf}\{t : B_t = a\}$.

a) Considere la función $f(a,\lambda) = E[\exp(-\lambda\tau_a)]$

I Encuentre una ecuación diferencial para $f(a,\lambda)$.

II Encuentre una relación entre $f(a,\lambda)$, $f(b,\lambda)$ y $f(a+b,\lambda)$. Para esto relacione τ_{a+b} con $\tau_a + \tau_b$.

III Encuentre una relación entre $f(ab,\lambda)$ y $f(a,b^2\lambda)$. Para esto relacione τ_{ab} con $b^2\tau_a$ utilizando la parte **I**.

IV Muestre que

$$f(a,\lambda) = \exp(c\cdot a\sqrt{\lambda})$$

Encuentre el valor de c.

b) Muestre que, para cualquier valor real a se tiene que

$$E[\exp(-\lambda\tau_a)] = \exp(-|a|\sqrt{2\lambda})$$

Para esto, resuelva considerando $a \geq 0$ y utilice el proceso $M_t = \exp(\rho B_t - \frac{1}{2}\rho^2 t)$. Concluya. *Indicación*: Note que $P(\tau_a \leq \infty) = 1$.

c) Muestre que

$$E[\tau_a^{-1}] = \frac{1}{a^2}$$

Indicación: Recuerde que

$$t^{-1} = \int_0^\infty e^{-\lambda t} d\lambda$$

`Sol:` τ_a es el instante en que el movimiento Browniano toca por primera vez el nivel a.

a) I. Para calcular esto condicionaremos sobre el valor que toma B_h

$$\begin{aligned} f(a,\lambda) &= E_{B_h}[E[e^{(-\lambda\tau_a)}|B_h]] \\ &= E_{B_h}[E[e^{-\lambda(\tau_{a-B_h}+h)} + o(h)]] \\ &= E_{B_h}[f(a-B_h,\lambda)\cdot e^{-\lambda h} + o(h)] \\ &= E_{B_h}\left[\left(f(a,\lambda) - B_h f'(a,\lambda) + \frac{1}{2}B_h^2 f''(a,\lambda) + o(h)\right)\cdot[1-\lambda h + o(h)]\right] \\ &= f(a,\lambda)\cdot(1-\lambda h) + \frac{1}{2}hf''(a,\lambda) + o(h) \end{aligned}$$

Dividiendo la última igualdad por h, y despejando vemos que

$$2\lambda f(a,\lambda) = f''(a,\lambda)$$

II. Vemos que

$$\begin{aligned} f(a+b,\lambda) &= E[e^{-\lambda\tau_{a+b}}] \\ &= E[e^{-\lambda(\tau_a+\tau_b)}] \\ &= f(a,\lambda)\cdot f(b,\lambda)) \end{aligned}$$

Con esto vemos que $f(a,\lambda)$ debe tomar la siguiente forma

$$f(a,\lambda) = \exp(a\cdot g(\lambda))$$

III. De la parte uno vemos que $\tau_{ab} = b^2\tau_a$. Basta tomar $\theta = b^2$ y notar que cuando se esta en τ_a el proceso escalado llega por primera vez a $a \cdot b$ es decir llega en el instante τ_{ab}

IV. Dada la propiedad anterior vemos que la función $g(\lambda)$ es de la forma $c\cdot\sqrt{\lambda}$ con lo que se obtiene el resultado requerido. $f(a,\lambda) = \exp(c\cdot a\sqrt{\lambda})$
ahora, utilizando la ecuación diferencial encontrada en la parte *a*) vemos que

$$2\lambda\exp(c\cdot a\sqrt{\lambda}) = c^2 exp(c\cdot a\sqrt{\lambda})$$

por lo que $c = 2$ o $c = -2$. Sin embargo cuando $a \to \infty$ tenemos que $f(a,\lambda) \to 0$ por lo que solo nos sirve $c = -2$.

b) Resolvemos para $a > 0$. De la `tarea 3 2008` sabemos que $E[M_t] = 1$, en particular

$$E[M_{\tau_a}] = 1 = E[e^{\alpha B_{\tau_a}} \cdot e^{-\frac{1}{2}\alpha^2 \tau_a}]$$

Escogiendo $\alpha = \sqrt{2\lambda}$ y notando que $B_{\tau_a} = a$ tenemos que

$$\exp(-\sqrt{2\lambda}a) = e^{-\lambda \tau_a}$$

Razonando por simetría se obtiene el resultado para todo a. El supuesto de $P[\tau_a \leq \infty] = 1$ se requiere para poder aplicar que $E[M_t] = 1$ en τ_a (MCT).

c) Aplicamos la desigualdad a τ_a y tomamos esperanza

$$\begin{aligned} E[\tau_a^{-1}] &= E[\int_0^\infty e^{-\lambda\tau_a} d\lambda] \\ &= \int_0^\infty E[e^{-\lambda\tau_a}] d\lambda \\ &= \int_0^\infty e^{-\sqrt{2\lambda}a} d\lambda \\ &= \int_0^\infty \frac{1}{a^2} e^{-\mu} \mu d\mu \\ &= \frac{1}{a^2} \end{aligned}$$

Donde en la última integral realizamos el cambio de variables $\mu = \sqrt{2\lambda}a$ e integramos por partes.

P3 Un *puente Browniano* entre a y b puede ser representado para $t \in [0, 1)$ en forma diferencial como

$$dX_t = \frac{b - X_t}{1 - t} dt + dB_t, \qquad X_0 = a,$$

en que B_t representa un movimiento Browniano estándar.

a) Resuelva la ecuación anterior.

Indicación: Puede ser útil postular una solución del tipo $\quad g(t)\{X_0 + c(t) + \int_0^t h(s) dB_s\}$

b) ¿Qué valor definiría para X_1? Justifique su respuesta.

c) Para $0 \leq s \leq t < 1, a = b = 0$, calcule $E(X_t)$ y $Cov(X_s, X_t)$.

`Sol:` Ver *Ucursos*, en sección `material alumnos`.

P4 Considere una empresa minera que afronta estocasticidad tanto en el precio del *commodity* que extrae como en otros fenómenos que aportan "ruido" (tales como la ley del mineral que extrae y los cambios tecnológicos). Si x representa el precio del commodity e y representa la cantidad extraída, un modelo simple para el ingreso por ventas de la firma lo representaremos por la función $F(x, y) = xy$, en que x e y siguen un movimiento Browniano geométrico con drift α_x y α_y y varianza σ_x y σ_y, respectivamente y tal que $E[dB_t^x dB_t^y] = \rho dt$ (B_t^x y B_t^y denotan al Browniano estándar en la fórmula para x e y, respectivamente).
A su vez, los costos de la operación minera los representaremos por la función $G = ln(xy)$.

Se define el beneficio neto de la firma como $H = F - G$. Entregue una expresión para dH.
Muestre que para $\alpha_x = \alpha_y = 1/2, \sigma_x = \sigma_y = 1$, $\rho = 1$, dH puede ser expresado como:

$$dH = w(F) dB_t^x + w(F) dB_t^y,$$

en que $w(F)$ es una función a determinar.

`Sol:` Propuesto.

P5 Considere las siguientes ecuaciones diferenciales estocásticas:

$$dX_t = \mu X_t dt + \sigma X_t dB_t, \quad X_0 = x_0 > 0$$

$$dY_t = -\alpha Y_t dt + \sigma dB_t, \quad X_0 = x_0$$

donde donde $-\infty < \mu < \infty$, $\sigma > 0$ y $\alpha > 0$, constantes.

a) ¿Qué esperaría de las variaciones de "corto plazo" de X_t e Y_t?

b) Sean $N_X(t)$ y $N_Y(t)$ el número de veces que X e Y han alcanzado el valor cero hasta el instante t. Compare $N_X(t)$ y $N_Y(t)$ de acuerdo a lo que usted esperaría para dichos procesos.

`Sol:` Propuesto.

P6 Considere un proceso estocástico X_t que satisface la siguiente ecuación:

$$dX_t = \eta dt - \mu X_t dt + \sigma dB_t, \quad X_0 = x_0$$

donde η y σ son constantes reales, $\mu > 0$.

La solución de la ecuación anterior puede ser escrita como:

$$X_t = g(t)\{x_0 + h(t) + \int_0^t b(s) dB_s\},$$

donde $g(t)$, $h(t)$ y $b(s)$ son funciones que intentaremos determinar. Para ello:

a) Encuentre una expresión alternativa para dX_t.

b) Es "razonable" suponer que las variaciones en cada término tengan asociados coeficientes iguales en ambas expresiones que se tiene para dX_t. Apóyese en esta idea para formular una ecuación diferencial para $g(t)$ y resuélvala.

c) Use $g(t)$ para formular una ecuación diferencial para $h(t)$ y resuélvala.

d) Use $g(t)$ para encontrar $b(s)$.

e) Concluya en base a los pasos anteriores explicitando la solución para X_t.

`Sol:` Propuesto.

Gustavo Angulo
gangulo@dim.uchile.cl

Diego Morán
dmoran@dim.uchile.cl