



EXAMEN

4 de Diciembre de 2006

Problema 1

A una tienda de música llegan clientes de acuerdo a un proceso de Poisson de tasa $\lambda[\text{clientes/hora}]$. Un cliente que entra a la tienda con probabilidad p , independiente de todo lo demás, comprará un CD mientras que con probabilidad q , independiente de todo lo demás, comprará un DVD musical.

1. (1,5 pts.) ¿Cuál es la probabilidad de que la cantidad de CDs vendidos entre las 15:00 y las 16:30 sea el triple de la cantidad de DVDs vendidos entre las 17:15 y las 18:00?
2. (1,5 pts.) ¿Cuál es la probabilidad de que la cantidad vendida de CDs entre las 18:00 y las 19:30 exceda en al menos dos unidades la cantidad de DVDs vendidos entre las 18:30 y las 20:00?
3. (1,5 pts.) Si la tienda permanece abierta al público durante H horas diarias y durante un día se vendieron D DVDs, ¿cuál es la probabilidad de que se hayan vendido n CDs?
4. (1,5 pts.) El costo para la tienda de permanecer abierta H horas en un día puede ser modelado como:

$$C(H) = \alpha e^{-H} + \gamma H$$

Por cada hora del día que permanece cerrada, se paga un costo de S_{seg} por concepto de seguridad. Cada CD vale S_C y cada DVD vale S_D . Formule y resuelva un problema que le permita encontrar el tiempo H que maximiza la utilidad esperada de la tienda.

Problema 2

A un centro de venta de entradas para un concierto llegan fans de acuerdo a un proceso de Poisson de tasa $\lambda[\text{fans/hora}]$. El centro comienza operando con sólo un boleterero, sin embargo, cuando el número de personas esperando en la cola llega a n se agrega un segundo boleterero y si se alcanzan las $2n$ personas en la cola se agrega un tercer boleterero. Cuando ya no hay más personas en la cola el(los) boleterero(s) adicional(es) se retira(n) quedando nuevamente un sólo boleterero para la atención de público¹. Cada boleterero demora un tiempo distribuido exponencialmente de parámetro $\mu[\text{horas}]$ en atender a un fan.

1. (2,0 pts.) Modele la situación descrita como una cadena de Markov en tiempo continuo. Caracterice sus estados y clasifíquelos en clases.
2. (0,5 pts.) ¿Qué condición deben cumplir los parámetros del problema para que la cadena de la parte anterior admita probabilidades estacionarias?
3. (1,0 pto.) Asumiendo que la condición de la parte anterior se cumple, plantee un sistema de ecuaciones que permita obtener las probabilidades estacionarias de la cadena de la parte 1.
4. (1,0 pto.) Si cada fan compra i , $i \in \{1 \dots 6\}$ entradas con probabilidad p_i ($\sum_{i=1}^6 p_i = 1$), cada entrada tiene un valor de $E[\$]$ y cada boleterero recibe un sueldo de $S_b[\$/\text{hora}]$. En promedio, ¿Cuál es la utilidad por unidad de tiempo que percibe la tienda por concepto de venta de entradas?

Si la tienda cambia su política de atención y decide evaluar cada 30 minutos la necesidad de agregar o quitar boletereros de acuerdo al mismo criterio anterior, es decir, la cantidad de boletereros se setea cada media hora como:

¹Nótese que un boleterero sólo se puede retirar cuando no hay personas esperando en la cola.

$$B(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x < n \\ 2 & \text{si } n \leq x < 2n \\ 3 & \text{si } 2n \leq x \end{cases}$$

donde x es la cantidad de personas esperando en la cola en el momento de la evaluación (recuerde que los boleteros pueden retirarse sólo si no hay personas en la cola). Suponga además que si un período de media hora comienza con f fans en el sistema y con b boleteros atendiendo, la probabilidad de que al cabo de esa media hora hayan c fans en el sistema es $P(f, b, c)$.

Denotemos por I al conjunto que enumera los instantes de evaluación de cada “período de media hora” ($I = \{1, 2, \dots\}$). Sean B_i el número de boleteros atendiendo en el instante i y F_i el número de fans en el sistema en el instante i .

5. (0,5 pts.) ¿Es $\{B_i, i \in I\}$ una cadena de Markov en tiempo discreto? Justifique claramente su respuesta y, en caso de ser afirmativa, obtenga las probabilidades de transición de la cadena.
6. (0,5 pts.) ¿Es $\{F_i, i \in I\}$ una cadena de Markov en tiempo discreto? Justifique claramente su respuesta y, en caso de ser afirmativa, obtenga las probabilidades de transición de la cadena.
7. (0,5 pts.) ¿Es $\{(B_i, F_i), i \in I\}$ una cadena de Markov en tiempo discreto? Justifique claramente su respuesta y, en caso de ser afirmativa, obtenga las probabilidades de transición de la cadena.

Problema 3

Sea B_t un movimiento browniano estándar.

1. Considere las siguientes ecuaciones diferenciales estocásticas:

$$dX_t = \mu X_t dt + \sigma X_t dB_t \quad X_0 = x_0 > 0,$$

donde $-\infty < \mu < \infty$ y $\sigma > 0$ constantes.

$$dY_t = -\alpha Y_t dt + \sigma dB_t \quad X_0 = x_0,$$

donde α y σ constantes positivas.

- (a) ¿Qué esperarías de las variaciones de “corto plazo” de X_t e Y_t ?
- (b) Sean $N_X(t)$ y $N_Y(t)$ el número de veces que X e Y han alcanzado el valor cero hasta el instante t . Compare $N_X(t)$ y $N_Y(t)$ de acuerdo a lo que usted esperaría para dichos procesos.
2. Considere un proceso estocástico X_t que satisface la siguiente ecuación:

$$dX_t = \eta dt - \mu X_t dt + \sigma dB_t \quad X_0 = x_0,$$

donde η y σ son constantes reales, $\mu > 0$.

La solución de la ecuación anterior puede ser escrita como:

$$X_t = g(t) \left\{ x_0 + h(t) + \int_0^t b(s) dB_s \right\},$$

donde $g(t)$, $h(t)$ y $b(s)$ son funciones que intentaremos determinar. Para ello:

- (a) Encuentre una expresión alternativa para dX_t .
- (b) Es “razonable” suponer que las variaciones en cada término tengan asociados coeficientes iguales en ambas expresiones que se tiene para dX_t . Apóyese en esta idea para formular una ecuación diferencial para $g(t)$ y resuélvala.
- (c) Use $g(t)$ para formular una ecuación diferencial para $h(t)$ y resuélvala.
- (d) Use $g(t)$ para encontrar $b(s)$.
- (e) Concluya en base a los pasos anteriores explicitando la solución para X_t .