FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICAS Y MATEMÁTICAS UNIVERSIDAD DE CHILE

IN790: Modelos Estocásticos en Sistemas de Ingeniería
Profesor : Raúl Gouet
Auxiliares : Gustavo Angulo, Diego Morán

Clase Auxiliar 12

19 de Noviembre de 2008

P1 *a)* Sea $\{X(t), t \geq 0\}$ movimiento Browniano estándar y sea T_x la primera vez que alcanza el valor x, con $x > 0$. Calcule la ditribución de $Z(t)$, donde $Z(t)$ está definido por

$$Z(t) = \begin{cases} X(t) & t < T_x \\ x & t \geq T_x \end{cases}$$

b) Sea $\{X(t), t \geq 0\}$ movimiento Browniano estándar. Calcule la distribución de $Z(t)$, donde $Z(t)$ está definido por

$$Z(t) = |X(t)| \quad t \geq 0$$

Sol: *a)* Calculemos primero $P(Z(t) = x)$

$$P(Z(t) = x) = P(T_x < t) = \frac{2}{\sqrt{2\pi t}} \int_x^\infty e^{-\frac{u^2}{2t}} du$$

Sea ahora $y < x$.

$$P(Z(t) \leq y) = P\left(X(t) \leq y, \max_{0 \leq s < t} X(s) < x\right) = P(X(t) \leq y) - P\left(X(t) \leq y, \max_{0 \leq s < t} X(s) \geq x\right)$$

Condicionando

$$P\left(X(t) \leq y, \max_{0 \leq s < t} X(s) \geq x\right) = P\left(X(t) \leq y \,\middle|\, \max_{0 \leq s < t} X(s) \geq x\right) P\left(\max_{0 \leq s < t} X(s) \geq x\right)$$

Notar que

$$P\left(X(t) \leq y \,\middle|\, \max_{0 \leq s < t} X(s) \geq x\right) = P\left(X(t) \geq 2x - y \,\middle|\, \max_{0 \leq s < t} X(s) \geq x\right)$$

Entonces

$$P\left(X(t) \leq y, \max_{0 \leq s < t} X(s) \geq x\right) = P\left(X(t) \geq 2x - y, \max_{0 \leq s < t} X(s) \geq x\right) = P(X(t) \geq 2x - y)$$

donde la última igualdad se deduce por continuidad.
Finalmente

$$\begin{aligned} P(Z(t) \leq y) &= P(X(t) \leq y) - P(X(t) \geq 2x - y) \\ &= P(X(t) \leq y) - P(X(t) \leq y - 2x) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} \int_{y-2x}^{y} e^{-\frac{u^2}{2t}} du \end{aligned}$$

b) Sea $y > 0$.

$$\begin{aligned} P(Z(t) \leq y) &= P(|X(t)| \leq y) \\ &= P(X(t) \leq y, -y \leq X(t)) \\ &= P(X(t) \leq y) - P(X(t) \leq y, X(t) < -y) \\ &= P(X(t) \leq y) - P(X(t) < -y) \\ &= P(X(t) \leq y) - (1 - P(X(t) \geq y)) \\ &= 2P(X(t) \leq y) - 1 \\ &= \frac{2}{\sqrt{2\pi t}} \int_{-\infty}^{y} e^{-\frac{u^2}{2t}} du \end{aligned}$$

P2 Sea $\{X(t), t \geq 0\}$ un movimiento Browniano estándar. Se define $Y(t) = tX(1/t) \ \ \forall t > 0, Y(0) = 0$.

a) ¿Cuál es la distribución de $Y(t)$?

b) Calcule $Cov(Y(s), Y(t))$.

c) Argumente que $\{Y(t), t \geq 0\}$ es también un movimiento Browniano estándar.

Sol: *a*) Sea $t > 0$.

$$\begin{aligned} P(Y(t) < y) &= P(X(1/t) < y/t) \\ &= \sqrt{\frac{t}{2\pi}} \int_{-\infty}^{y/t} e^{-\frac{u^2 t}{2}} du \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} \int_{-\infty}^{y} e^{-\frac{z^2}{2t}} dz \end{aligned}$$

donde hemos hecho el cambio de variables $z = ut$.
Luego $Y(t) \rightsquigarrow \mathcal{N}(0, t)$.

b)

$$\begin{aligned} Cov(Y(s), Y(t)) &= Cov(sX(1/s), tX(1/t) \\ &= st \cdot Cov(X(1/s), X(1/t)) \\ &= st \cdot \text{mín}\{1/s, 1/t\} \\ &= \text{mín}\{s, t\} \end{aligned}$$

c) Dado que de *a*) es posible deducir que $\{Y(t) : t \geq 0\}$ es un proceso Gaussiano, junto a *b*) se concluye que $\{Y(t) : t \geq 0\}$ es movimiento Browniano estándar.

P3 Sean $\{B(t), t \geq 0\}$ un movimiento Browniano estándar, $A > 0$, $B > 0$ y $\tau = \text{mín}\{t : B_t = -B \vee B_t = A\}$.

a) Muestre que $P(\tau < \infty) = 1$ y que

$$P(B_\tau = A) = \frac{B}{B + A}$$

b) Muestre que

$$E[\tau] = A \cdot B$$

Sol: *a*) Sea $\tau_A = \text{mín}\{t : B_t = A\}$.

$$1 = P(\tau_A < \infty) \leq P(\tau < \infty)$$

con lo que concluimos que $P(\tau < \infty) = 1$
Ahora, por un lado

$$\begin{aligned} E(B_\tau) &= A \cdot P(B_\tau = A) - B \cdot P(B_\tau = -B) \\ &= A \cdot P(B_\tau = A) - B \cdot (1 - P(B_\tau = A)) \\ &= (A + B)P(B_\tau = A) - B \end{aligned}$$

Además

$$E(B_\tau) = E(E(B_\tau | \tau)) = E(0) = 0$$

Luego

$$P(B_\tau = A) = \frac{B}{A + B}$$

b) Similarmente

$$\begin{aligned} E(B_\tau^2 - \tau) &= E(B_\tau^2) - E(\tau) \\ &= A^2 \cdot P(B_\tau = A) + B^2 \cdot P(B_\tau = -B) - E(\tau) \\ &= A^2 \frac{B}{A+B} + B^2 \frac{A}{A+B} - E(\tau) \end{aligned}$$

Además

$$E(B_\tau^2 - \tau) = E(E(B_\tau^2 - \tau|\tau)) = E(0) = 0$$

Luego

$$E(\tau) = A \cdot B$$

Gustavo Angulo
gangulo@dim.uchile.cl

Diego Morán
dmoran@dim.uchile.cl