IN790: Modelos Estocásticos en Sistemas de Ingeniería
Profesor : Raúl Gouet
Auxiliares : Gustavo Angulo, Diego Morán

Clase Auxiliar 11

6 de Noviembre de 2008

P1 *a*) Considere un sistema $M/M/1$ y sea π su vector de distribución estacionaria. Sea $\Pi(z) = \sum_{i=0}^{\infty} \pi_i z^i$ su función generadora, donde $|z| < 1$. Muestre que

$$\Pi(z) = \frac{1-\rho}{1-z\rho}$$

y concluya que $\pi_i = (1-\rho)\rho^i$.

b) Considere un sistema $M/G/1$, donde los tiempos de servicios son independientes y distribuidos según B. Sea X_n la cantidad de personas en el sistema cuando el enésimo cliente se retira, y sea $p_{ij} = P(X_{n+1} = j|X_n = i)$. Sea π el vector de distribución estacionaria para $P = (p_{ij})$. Muestre que su función generadora cumple

$$\Pi(z) = \frac{(1-\rho)(1-z)K(z)}{K(z)-z}$$

donde $k_i = \int_0^{\infty} \frac{e^{-\lambda t}(\lambda t)^n}{n!} dB(t)$ y $K(z) = \sum_{i=0}^{\infty} k_i z^i$.

c) Usando la parte anterior, muestre que si el tiempo de servicio es exponencial, entonces se obtiene la función generadora de (a).

d) Usando (b), obtenga la fórmula de Pollaczek-Khintchine

$$L = \rho + \frac{\rho^2 + \lambda^2\sigma_S^2}{2(1-\rho)}$$

donde σ_S^2 es la varianza del tiempo de servicio.

Sol: *a*) Sea $i \geq 1$ y z con $|z| < 1$. Tenemos

$$(\lambda + \mu)\pi_i = \lambda\pi_{i-1} + \mu\pi_{i+1}$$

$$\implies \quad \pi_{i+1} = (1+\rho)\pi_i - \rho\pi_{i-1}$$

$$\implies \quad \pi_{i+1}z^i = (1+\rho)\pi_n z^i - \rho\pi_{i-1}z^i$$

$$\implies \quad z^{-1}\sum_{i=1}^{\infty}\pi_{i+1}z^{i+1} = (1+\rho)\sum_{i=1}^{\infty}\pi_i z^i - \rho z\sum_{i=1}^{\infty}\pi_{i-1}z^{i-1}$$

$$\implies \quad z^{-1}\sum_{i=2}^{\infty}\pi_i z^i = (1+\rho)\sum_{i=1}^{\infty}\pi_i z^i - \rho z\sum_{i=0}^{\infty}\pi_i z^i$$

$$\implies \quad z^{-1}(\Pi(z) - \pi_0 - \pi_1 z) = (1+\rho)(\Pi(z) - \pi_0) - \rho z\Pi(z)$$

Además $\lambda\pi_0 = \mu\pi_1$. Luego $\pi_1 = \rho\pi_0$.

$$\implies \quad z^{-1}(\Pi(z) - \pi_0 - \rho\pi_0 z) = (1+\rho)(\Pi(z) - \pi_0) - \rho z\Pi(z)$$

$$\implies \quad \Pi(z) = \frac{\pi_0}{1-\rho z}$$

Como $\Pi(1)=1$, concluimos que $\pi_0 = 1-\rho$ y

$$\Longrightarrow \quad \Pi(z) = \frac{1-\rho}{1-\rho z}$$

Además, como $|\rho z| < 1$

$$\begin{aligned}
\Pi(z) &= (1-\rho)\frac{1}{1-\rho z} \\
&= (1-\rho)\sum_{i=0}^{\infty}(\rho z)^i \\
&= \sum_{i=0}^{\infty}(1-\rho)\rho^i z^i
\end{aligned}$$

Concluimos entonces que $\pi_i = (1-\rho)\rho^i \quad \forall i$.

P2 Vemos primero que

$$\begin{aligned}
p_{ij} &= P(X_{n+1}=j|X_n=i) \\
&= P(\text{llegan } j-1+1 \text{ personas durante durante el tiempo de servicio } S) \\
&= \int_0^{\infty} P(\text{llegan } j-i+1 \text{ personas durante } S|S=t)dB(t) \\
&= \int_0^{\infty} \frac{e^{-\lambda t}(\lambda t)^{j-i+1}}{i!}dB(t) \\
&= k_{j-i+1}
\end{aligned}$$

Notar que la matriz de transición tiene la forma

$$P = \begin{bmatrix}
k_0 & k_1 & k_2 & k_3 & \dots \\
k_0 & k_1 & k_2 & k_3 & \dots \\
0 & k_0 & k_1 & k_2 & \dots \\
0 & 0 & k_0 & k_1 & \dots \\
0 & 0 & 0 & k_0 & \dots \\
0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots
\end{bmatrix}$$

Luego, de $\pi = \pi P$, tenemos

$$\pi_i = k_i\pi_i + \sum_{j=1}^{i+1}\pi_j k_{j-i+1}$$

$$\Longrightarrow \quad \pi_i z^i = \pi_0 k_i z^i + \sum_{j=1}^{i+1}\pi_j k_{j-i+1} z^i$$

$$\Longrightarrow \quad \sum_{i=0}^{\infty}\pi_i z^i = \pi_0\sum_{i=0}^{\infty}k_i z^i + \sum_{i=0}^{\infty}\sum_{j=1}^{i+1}\pi_j k_{j-i+1}z^i$$

$$\Longrightarrow \quad \sum_{i=0}^{\infty}\pi_i z^i = \pi_0\sum_{i=0}^{\infty}k_i z^i + z^{-1}\sum_{i=0}^{\infty}\sum_{j=1}^{i+1}\pi_j z^j k_{j-i+1}z^{i-j+1}$$

$$\Longrightarrow \quad \sum_{i=0}^{\infty}\pi_i z^i = \pi_0\sum_{i=0}^{\infty}k_i z^i + z^{-1}\sum_{j=1}^{\infty}\sum_{i=j-1}^{\infty}\pi_j z^j k_{j-i+1}z^{i-j+1}$$

$$\implies \quad \sum_{i=0}^{\infty} \pi_i z^i = \pi_0 \sum_{i=0}^{\infty} k_i z^i + z^{-1} \sum_{j=1}^{\infty} \pi_j z^j \sum_{i=0}^{\infty} k_j z^j$$

$$\implies \quad \sum_{i=0}^{\infty} \pi_i z^i = \pi_0 \sum_{i=0}^{\infty} k_i z^i + z^{-1} \sum_{j=0}^{\infty} \pi_j z^j \sum_{i=0}^{\infty} k_j z^j - z^{-1}\pi_0 \sum_{i=0}^{\infty} k_j z^j$$

$$\implies \quad \Pi(z) = \pi_0 K(z) + z^{-1}\Pi(z)K(z) - z^{-1}\pi_0 K(z)$$

$$\implies \quad \Pi(z) = \frac{\pi_0(1-z)K(z)}{K(z)-z}$$

Además $\Pi(1) = 1$ y $K(1) = 1$, luego

$$1 = \Pi(1) = \lim_{z\to 1} \frac{\pi_0(1-z)K(z)}{K(z)-z}$$

$$\implies \quad \lim_{z\to 1} \frac{\pi_0(-1)K(z) + \pi_0(1-z)K'(z)}{K'(z)-1} = 1$$

Por otro lado

$$K'(z) = \sum_{i=1}^{\infty} i k_i z^{i-1}$$

Luego

$$\begin{aligned}
K'(1) &= \sum_{i=1}^{\infty} i k_i \\
&= \sum_{i=1}^{\infty} i \int_0^{\infty} \frac{e^{-\lambda t}(\lambda t)^i}{i!} dB(t) \\
&= \int_0^{\infty} e^{-\lambda t} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{(\lambda t)^i}{(i-1)!} dB(t) \\
&= \int_0^{\infty} e^{-\lambda t} \lambda t \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(\lambda t)^i}{i!} dB(t) \\
&= \int_0^{\infty} e^{-\lambda t} \lambda t e^{\lambda t} dB(t) \\
&= \lambda \int_0^{\infty} t dB(t) \\
&= \lambda E[S] = \rho < 1
\end{aligned}$$

$$\implies \quad 1 = \lim_{z\to 1} \frac{\pi_0(-1)K(z) + \pi_0(1-z)K'(z)}{K'(z)-1} = \frac{\pi_0(-1)K(1)}{K'(1)-1} = \frac{\pi_0}{1-\rho}$$

Concluimos entonces que $\pi_0 = 1-\rho$ y

$$\Pi(z) = \frac{(1-\rho)(1-z)K(z)}{K(z)-z}$$

P3 Tenemos

$$k_i = \int_0^\infty \frac{e^{-\lambda t}(\lambda t)^i}{i!} dB(t) = \int_0^\infty \frac{e^{-\lambda t}(\lambda t)^i}{i!} \mu e^{-\mu t} dt$$

$$\Longrightarrow \quad K(z) = \sum_{i=0}^\infty k_i z^i = \sum_{i=0}^\infty z^i \int_0^\infty \frac{e^{-\lambda t}(\lambda t)^i}{i!} \mu e^{-\mu t} dt$$

$$\Longrightarrow \quad K(z) = \int_0^\infty \mu e^{-(\lambda+\mu)t} \sum_{i=0}^\infty \frac{(\lambda z t)^i}{i!} dt = \int_0^\infty \mu e^{-(\lambda+\mu)t} e^{\lambda z t} dt$$

$$\Longrightarrow \quad K(z) = \frac{\mu}{\lambda + \mu - \lambda z} = \frac{1}{\rho + 1 - \rho z}$$

Finalmente

$$\Pi(z) = \frac{(1-\rho)(1-z)K(z)}{K(z) - z} = \frac{(1-\rho)(1-z)}{1 - z\rho + z - \rho z^2} = \frac{1-\rho}{1-\rho z}$$

P4 Propuesto

Notar que $\Pi'(1) = L$ y aplicar l'Hôpital dos veces.

Gustavo Angulo
gangulo@dim.uchile.cl

Diego Morán
dmoran@dim.uchile.cl