Pauta Control 2

15 de Octubre de 2008

P1 a) Sea $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de v.a. i.i.d. con valores en $A = \{1, \ldots, N\}$, tal que $\mathbb{P}(Y_1 = k) = \frac{1}{N}$, $\forall\, k \in A$. Considere la nueva sucesión $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ definida por $X_n = \max\{Y_k \ : \ 0 \leq k \leq n\}$, $n \in \mathbb{N}$.

i) (1 pto.) Pruebe que $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una ***cadena de markov***. Además, calcule los coeficientes p_{ij} de su matriz de transición P

ii) (0,5 pto.) Sea $P^{(n)}$ la matriz de transición en n etapas y $p_{ij}^{(n)}$ sus coeficientes. Encuentre una ecuación (recurrencia) que relacione los coeficientes $p_{ij}^{(n)}$ con los $p_{ij}^{(n-1)}$.

iii) (1 pto) Demuestre que $p_{ii}^{(n)} = \left(\frac{i}{N}\right)^n$ para $i \in A$ y $p_{ij}^{(n)} = \left(\frac{j}{N}\right)^n - \left(\frac{j-1}{N}\right)^n$ para $i, j \in A, i < j$.

b) Suponga que estamos en el semestre *Primavera 2009* y que usted, como alumno aprobado con excelencia del curso $IN79O$, logra convertirse en el nuevo auxiliar del susodicho ramo. Además, usted tiene mucha suerte y la pregunta que aparece más arriba (y que respondió correctamente en 2008) es justo la pregunta que le toca corregir en el $C2$ de 2009 (la llamaremos *P3C2-2009*).

Su estilo de corregir las pruebas de sus M alumnos es muy particular. Comienza tomando la prueba del alumno 1. Se sabe que cada vez que toma la prueba del alumno i, con $1 \leq i \leq M-1$, existe una probabilidad $p \in [0,1]$ de avanzar a la prueba del alumno $i+1$ y una probabilidad $(1-p)$ de devolverse a la prueba del alumno $i-1$. La primera vez que toma la prueba de un alumno usted le asigna, independiente de todo lo demás, y con probabilidad q_j, una nota $j \in \{2.0, 3.0, \ldots, 7.0\}$. Cada vez que vuelve a pasar por la prueba de un alumno le baja una décima (la nota *puede* ser *negativa*). Si llega a la prueba del alumno M, le pone la nota correspondiente y el proceso de corrección termina. Por otro lado, si está en la prueba del alumno 1 y "se devuelve" entonces a todos los alumnos que no les ha puesto nota todavía les pone un 1.0 y finaliza la corrección.

i) (1.0 pto) Modele el *paso de una prueba a otra* como una ***cadena de markov***[1]. Dibuje el grafo correspondiente, identifique las clases y clasifique sus estados.

ii) (0.5 ptos) Calcule la probabilidad de que el alumno M obtenga una nota estrictamente superior a 1.0 en la *P3C2-2009*.

iii) (1.0 pto) Calcule la nota esperada del alumno M en la *P3C2-2009*.

Ahora suponga que el curso sólo tiene 4 alumnos, es decir, $M = 4$ y que $p = \frac{1}{2}$. Se definen las cantidades m_{ij}:*el número esperado de veces que Ud. pasa por la prueba del alumno j durante el proceso de corrección dado que parte corrigiendo al alumno i*, con $i, j \in \{1, \ldots, M\}$.

iv) (0.5 ptos) Determine m_{1i} con $1 \leq i \leq 3$

v) (1.0 ptos) Calcule las notas esperadas de los alumnos 1 y 2 en la *P3C2-2009*.

vi) (0.5 ptos) Calcule el tiempo esperado de corrección (número de pasos).

[1] Para esta modelación no debe considerar las probabilidades q_j.

`Sol:` *a)* I*)* Hay que probar que.

$$\mathbb{P}(X_n = i_n/X_{n-1} = i_{n-1}, \dots, X_1 = i_1) = \mathbb{P}(X_n = i_n/X_{n-1} = i_{n-1})$$

En efecto,

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}\left(X_n = i_n/X_{n-1} = i_{n-1}, \dots, X_2 = i_2, X_1 = i_1\right) &= \mathbb{P}\left(\text{máx}\{Y_k : 0 \leq k \leq n\} = i_n/\,\text{máx}\{Y_k : 0 \leq k \leq n-1\} = i_{n-1}, \dots, \text{máx}\{Y_2, Y_1\} = i_2, Y_1 = i_1\right) \\
&= \mathbb{P}\left(\text{máx}\{Y_n, i_{n-1}\} = i_n/\,\text{máx}\{Y_{n-1}, i_{n-2}\} = i_{n-1}, \dots, \text{máx}\{Y_2, i_1\} = i_2, Y_1 = i_1\right) \\
&= \mathbb{P}\left(\text{máx}\{Y_n, i_{n-1}\} = i_n\right) \\
&= \frac{\mathbb{P}\left(\text{máx}\{Y_n, i_{n-1}\} = i_n\right) \cdot \mathbb{P}\left(Y_{n-1} = i_{n-1}\right)}{\mathbb{P}\left(Y_{n-1} = i_{n-1}\right)} \\
&= \mathbb{P}(X_n = i_n/X_{n-1} = i_{n-1})
\end{aligned}$$

Para el cálculo de las probabilidades de transición note que, de los cálculos anteriores, $p_{ij} = \mathbb{P}\left(\text{máx}\{Y_1, i\} = j\right)$, luego:

$$p_{ij} = \begin{cases} \frac{i}{N} & \text{si } i = j \\ \frac{1}{N} & \text{si } i < j \\ 0 & \text{si } i > j \end{cases}$$

II*)* Debemos usar las ecuaciones de Chapman-Kolmogorov:

$$p_{ij}^{(n)} = \sum_{k=1}^{N} p_{ik}^{(n-1)} p_{kj}$$

En este caso se obtiene:

$$p_{ij}^{(n)} = \sum_{k=i}^{j-1} p_{ik}^{(n-1)} \frac{1}{N} + p_{ij}^{(n-1)} \frac{j}{N}$$

III*)* Veamos

$$p_{ii}^{(n)} = \mathbb{P}(\text{quedarme en } i \text{ por } n \text{ etapas}) = (\mathbb{P}(\text{quedarme en } i))^n = \left(\frac{i}{N}\right)^n$$

Para calcular $p_{ij}^{(n)}$ se puede usar el valor de $p_{ii}^{(n)}$, la parte *b)* inducción. Luego de un poco de álgebra se obtiene el resultado deseado.

No obstante, existe otra forma de calcular $p_{ij}^{(n)}$, que usa la conocida propiedad:

$$\mathbb{P}(A \setminus B) = \mathbb{P}(A) - \mathbb{P}(B), \quad \text{cuando } B \subseteq A$$

Con la siguiente elección de los eventos A y B:

$$A = \text{“quedarse en algo menor o igual a } j \text{ en los } n \text{ pasos”}$$

$$B = \text{“quedarse en algo menor estricto que } j \text{ en los } n \text{ pasos”}$$

b) I)
- Una forma es modelar exactamente como la ruina del jugador con fortuna M y estados absorbentes 0 y M. Al estado 0 se llega cuando Ud., el auxiliar, está en la primera prueba y "se devuelve".
  En este caso hay 3 clases: $\{0\}, \{M\}$ recurrentes y la clase $\{1, 2, \dots, M-1\}$ que es una clase trasiente.
- Otra opción es modelar como lo hicimos en la clase del , agregando un estado "inicio". En este caso hay sólo una clase, recurrente, conformada por todos los estados.

II) Claramente, la única forma de que el alumno M obtenga nota superior a 2.0 es que Ud. alcance acorregir la prueba de ese alumno.

Dada la analogía a la ruina del jugador que estamos haciendo, se puede usar (o deducir) la fórmula para f_1: *Probabilidad de llegar a estado M, dado que partí en estado 1*, en los casos $p = \frac{1}{2}$ y $p \neq \frac{1}{2}$.

$$f_1 = \begin{cases} \frac{1}{M} & p = \frac{1}{2} \\ \frac{1-\frac{1-p}{p}}{1-\frac{1-p}{p}^M} & p \neq \frac{1}{2} \end{cases}$$

III) Condicionaremos en la última prueba corregida por el auxiliar:

$$\begin{aligned} E(\text{Nota } M) &= E(\text{Nota/última es } 1) \cdot \mathbb{P}(\text{última es } 1) + E(\text{Nota/última es } M) \cdot \mathbb{P}(\text{última es } M) \\ &= 1 \cdot \mathbb{P}(\text{última es } 1) + E(\text{Nota asignada}) \cdot \mathbb{P}(\text{última es } M) \\ &= (1 - f_1) + \left(\sum_{j=2}^{7} j \cdot q_j \right) \cdot f_1 \end{aligned}$$

IV) Pueden calcular m_{1j} tal y como lo hicimos en la auxiliar del `07 de Octubre`, siempre y cuando hayan modelado con el estado "inicio", pues de esa manera se puede aplicar la propiedad vista en esa clase.

Otra forma de hacerlo, si es que modelaron como la ruina del jugador estándar, es usar lo visto en cátedra y calcular todos los coeficientes de la matriz $M = (m_{ij})_{i,j \in T}$, con $T = \{2, \dots, M-1\}$. Se puede ver que

$$Q = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$$

Además, sabemos que $M = (I - Q)^{-1}$, luego

$$M = \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

Los valores pedidos corresponden la la primera fila de la matriz.

OBS: $(I - Q)^{-1}$ es la inversa que se dió durante el control.

v) Pimero calculemos la nota esperada del alumno 1:

$$\begin{aligned}
E(\text{Nota } 1) &= E\left(\text{Nota asignada} - \frac{(\text{Pasos por prueba 1, partiendo en 1}) - 1}{10}\right) \\
&= \sum_{j=2}^{7} j \cdot q_j - \frac{m_{11} - 1}{10} \\
&= \sum_{j=2}^{7} j \cdot q_j - \frac{1}{20}
\end{aligned}$$

La idea es condicionar en el primer movimiento: *"retrocedo a 0"* o *"avanzo a 2"*:

$$Nota_2 = 1 \cdot \mathbb{P}(\text{retrocedo a } 0) + [Nota - 0{,}1(m_2 - 1)] \cdot \mathbb{P}(\text{avanzo a } 2)$$

$$\begin{aligned}
E(\text{Nota } 2) &= E(\text{Nota/retrocedo a } 0) \cdot \mathbb{P}(\text{retrocedo a } 0) + E(\text{Nota/avanzo a } 2) \cdot \mathbb{P}(\text{avanzo a } 2) \\
&= 1 \cdot (1-p) + E\left(\text{Nota asignada} - \frac{(\text{Pasos por prueba 2, partiendo en 2}) - 1}{10}\right) \cdot p \\
&= (1-p) + \left(\sum_{j=2}^{7} j \cdot q_j - \frac{m_{22} - 1}{10}\right) \cdot p \\
&= (1-p) + \left(\sum_{j=2}^{7} j \cdot q_j - \frac{1}{10}\right) \cdot p
\end{aligned}$$

El valor $m_{22} = 2$ se calcula de la misma manera que en la parte **iv)**.

vi) La solución es la suma de los $m_{1i},\ i = 1, 2, 3$. Aunque, dependiendo de cómo se haya interpretado "número de pasos", el resultado puede variar en una constante. Mientras sean consistentes el resultado está correcto.

P2 El otrora alumno y ahora auxiliar del curso, luego de tomar un control del mismo, decide ir a ver el partido de la selección chilena de fútbol ante uno de sus rivales en las clasificatorias. Ambos equipos tienen N jugadores. El director técnico de La Roja ha decidido promover el juego colectivo, por lo que cuando un jugador chileno tiene la pelota, dará un pase luego de un tiempo exponencial de parámetro α, siendo el destinatario elegido de forma equiprobable entre sus compañeros. De este modo, el equipo rival nunca tiene la posesión del balón. Lamentablemente, este esquema desgasta a los jugadores chilenos y perturba a sus rivales. Cada jugador chileno juega bien durante un tiempo exponencial de parámetro λ, pasando entonces a jugar mal durante un tiempo exponencial de parámetro μ, luego del cual vuelve a jugar bien. Además, cuando un jugador chileno recibe una falta grave, pasa a estar lesionado, independientemente de cómo haya estado jugando. Un jugador lesionado, el cual sigue jugando a pesar de su estado, se recupera después de un tiempo exponencial de parámetro ν, luego del cual pasa a jugar bien. Cada jugador rival esperará un tiempo exponencial de parámetro θ antes de cometer una falta grave, afectando de forma equiprobable a cualquiera de los jugadores chilenos que no estén lesionados.

Sea $i \in I = \{1 \ldots N\}$ el conjunto de jugadores. Sea $\{Z(t) : t \geq 0\}$ un proceso que indica qué jugador tiene la pelota.

a) (1.0 pto) Represente $\{Z(t) : t \geq 0\}$ como una cadena de Markov a tiempo continuo. Explicite estados, transiciones y tasas.

b) (1.0 pto) Calcule la probabilidad que el jugador j tenga la pelota en el instante t dado que el partido lo inicia el jugador i.

Indicación: Utilice las ecuaciones de Kolmogorov forward y recuerde que una ecuación de la forma $y'(t) + \beta y(t) = f(t)$ tiene por solución general $y(t) = e^{-\beta t} \int_0^t e^{\beta s} f(s) ds + K e^{-\beta t}$

c) (1.0 pto) Argumente la existencia de una distribución estacionaria para $\{Z(t) : t \geq 0\}$, plantee el sistema de ecuaciones que permite obtenerla y encuéntrela.

Sean $X(t)$ e $Y(t)$ las cantidades de jugadores que están jugando bien y mal, respectivamente, en el instante t. Sea $E(t)$ es estado del jugador i en el instante t.

d) (1.0 pto) Represente $\{(X(t), Y(t)) : t \geq 0\}$ como una cadena de Markov a tiempo continuo. Explicite estados, transiciones y tasas.

e) (1.0 pto) ¿Son $\{E(t) : t \geq 0\}$, $\{Y(t) : t \geq 0\}$, $\{X(t) + Y(t) : t \geq 0\}$, $\{(E(t), Y(t)) : t \geq 0\}$ y $\{(E(t), X(t) + Y(t)) : t \geq 0\}$ cadenas de Markov? Argumente brevemente.

Suponga que conoce las matrices de transición $P(t)$ y $R(t)$ de $\{Z(t) : t \geq 0\}$ y $\{(X(t), Y(t)) : t \geq 0\}$, respectivamente. Sean (P_i) y $(R_{n,m})$ las distribuciones iniciales respectivas. Sea $D \subset I$ el conjunto de delanteros de la selección. Decimos que Chile está en posición de gol en el instante t si en ese momento todos los jugadores están jugando bien, o si al menos L están jugando bien y la pelota la tiene un delantero.

f) (1.0 pto) Entregue una expresión para la probabilidad de encontrar a Chile en posición de gol en el instante t y condiciones suficientes para que esta probabilidad se mantenga constante durante todo el partido.

g) (0.5 pto) Sea $G(t)$ la variable aleatoria que indica si Chile está o no en posición de gol en el instante t. ¿Es $\{G(t) : t \geq 0\}$ una cadena de Markov a tiempo continuo? Justifique.

h) (0.5 pto) Haga un pronóstico del resultado del partido *Chile-Argentina*, válidos por las eliminatorias Sudáfrica 2010. Debe adivinar el marcador exacto para obtener el puntaje.

`Sol:` *a*) Claramente el conjunto de estados es I y las transiciones son de la forma

$$(i) \longrightarrow (j) \quad \frac{\alpha}{N-1}$$

b) De las ecuaciones De Kolmogorov forward

$$\begin{aligned}
P'_{ij}(t) &= \sum_{k\neq j} P_{ik}(t)q_{kj} - \nu_j P_{ij}(t) \\
&= \frac{\alpha}{N-1}\sum_{k\neq j} P_{ik}(t) - \alpha P_{ij}(t) \\
&= \frac{\alpha}{N-1}(1-P_{ij}(t)) - \alpha P_{ij}(t) \\
&= \frac{\alpha}{N-1} - \frac{\alpha N}{N-1}P_{ij}(t)
\end{aligned}$$

$$\Longrightarrow P'_{ij}(t) + \frac{\alpha N}{N-1}P_{ij}(t) = \frac{\alpha}{N-1}$$

$$\Longrightarrow e^{\frac{\alpha N}{N-1}t}\left(P'_{ij}(t) + \frac{\alpha N}{N-1}P_{ij}(t)\right) = \frac{\alpha}{N-1}e^{\frac{\alpha N}{N-1}t}$$

$$\Longrightarrow \frac{d}{dt}\left\{e^{\frac{\alpha N}{N-1}t}P_{ij}(t)\right\} = \frac{\alpha}{N-1}e^{\frac{\alpha N}{N-1}t}$$

$$\Longrightarrow e^{\frac{\alpha N}{N-1}t}P_{ij}(t) = \frac{e^{\frac{\alpha N}{N-1}t}}{N} + K$$

$$\Longrightarrow P_{ij}(t) = \frac{1}{N} + Ke^{-\frac{\alpha N}{N-1}t}$$

Como $P_{ii}(0) = 1$ y $P_{ij}(0) = 0$ si $i \neq j$, entonces

$$P_{ii}(t) = \frac{1}{N} + \frac{N-1}{N}e^{-\frac{\alpha N}{N-1}t}$$

$$P_{ij}(t) = \frac{1}{N} - \frac{1}{N}e^{-\frac{\alpha N}{N-1}t} \quad \forall i \neq j$$

c) Como la cadena es irreducible y con una cantidad finita de estados, entonces existe una distribución estacionaria $(\pi_j : j \in I)$ que es la única solución no negativa de

$$\nu_j \pi_j = \sum_{i\neq j} \pi_i q_{ij}$$

$$\sum_j \pi_j = 1$$

De la primera ecuación

$$\begin{aligned}
\lambda\pi_j &= \frac{\lambda}{N-1}\sum_{i\neq j}\pi_i \\
&= \frac{\lambda}{N-1}(1-\pi_j)
\end{aligned}$$

$$\Longrightarrow \pi_j = \frac{1}{N} \quad \forall j \in I$$

d) El conjunto de estados es $\{(n,m)\in\mathbb{Z}_+^2 : n+m\le N\}$ y las transiciones son de la forma

$$(0,0)\longrightarrow(1,0)\quad N\nu$$

$$(N,0)\longrightarrow\begin{cases}(N-1,1) & N\lambda\\ (N-1,0) & N\theta\end{cases}$$

$$(0,N)\longrightarrow\begin{cases}(1,N-1) & N\mu\\ (0,N-1) & N\theta\end{cases}$$

$$1\le n<N\qquad(n,0)\longrightarrow\begin{cases}(n-1,1) & n\lambda\\ (n+1,0) & (N-n)\nu\\ (n-1,0) & N\theta\end{cases}$$

$$1\le m<N\qquad(0,m)\longrightarrow\begin{cases}(1,m-1) & m\mu\\ (0,m+1) & (N-m)\nu\\ (0,m-1) & N\theta\end{cases}$$

$$1\le n,m<N\qquad(n,m)\longrightarrow\begin{cases}(n-1,m+1) & n\lambda\\ (n+1,m-1) & m\mu\\ (n-1,m) & \frac{n}{n+m}N\theta\\ (n,m-1) & \frac{m}{n+m}N\theta\\ (n+1,m) & (N-n-m)\nu\end{cases}$$

e) $\{E(t):t\ge 0\}$ no es cadena de Markov, puesto que el tiempo de permanencia antes de ser lesionado depende de la cantidad total de jugadores lesionados.

$\{Y(t):t\ge 0\}$ no es cadena de Markov, ya que el tiempo de permanencia en un estado también depende de $X(t)$.

$\{X(t)+Y(t):t\ge 0\}$ es cadena de Markov, puesto que $X(t)+Y(t)$ corresponde a una cadena de nacimiento y muerte en la cantidad de jugadores no lesionados.

$\{(E(t),Y(t)):t\ge 0\}$ no es cadena de Markov, ya que el tiempo de permanencia en un estado también depende de $X(t)$.

$\{(E(t),X(t)+Y(t)):t\ge 0\}$ es cadena de Markov pues completa la información faltante para la primera cadena.

f) Sea $P_G(t)$ la probabilidad buscada. Sean $(P_{ij}(t))$ y $(R_{(n,m)(p,q)}(t))$ las matrices de transición de las cadenas. Se tiene entonces

$$P_G(t)=\sum_{(n,m)\in E}R_{n,m}R_{(n,m)(N,0)}(t)+\left(\sum_{(n,m)\in E}\sum_{p=L}^{N-1}\sum_{q=0}^{N-p-1}R_{n,m}R_{(n,m)(p,q)}(t)\right)\left(\sum_i\sum_{j\in D}P_iP_{ij}(t)\right)$$

Una condición suficiente para que $P_G(\cdot)$ sea constante es que las distribuciones iniciales (P_i) y $(R_{n,m})$ correspondan a las distribuciones estacionarias respectivas.

g) El proceso $\{G(t):t\ge 0\}$ no es cadena de Markov puesto que el tiempo de permanencia en cada estado corresponde a suma de variables exponenciales, lo cual no es una variable exponencial.

h) `CHILE 1 - ARGENTINA 0!!!` Vamos Chile!!! `xD`