

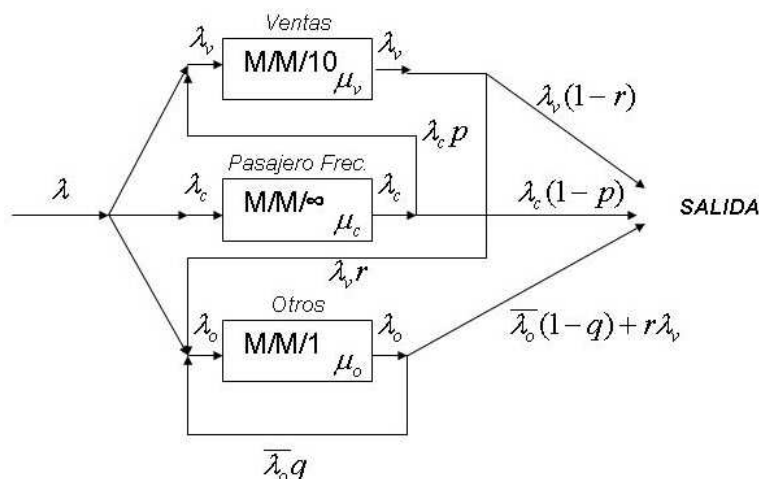


SOLUCIÓN CONTROL 3

17 de Noviembre de 2006

Problema 1

1. El sistema se muestra en la siguiente figura.



Las tasas efectivas y las condiciones de régimen estacionario son las siguientes:

Sistema	Tipo Sistema	Tasa Efectiva	Valor	CRE
Ventas	$M/M/10$	λ_v	$\lambda f_v + p \lambda f_c$	$\lambda_v < 10\mu_v$
Pasajero Frecuente	$M/M/\infty$	λ_c	λf_c	Siempre \exists
Otros	$M/M/1$	λ_o	$r(\lambda f_v + p \lambda f_c) + \frac{\lambda f_o}{1-q}$	$\lambda_o < \mu_o$

En lo que sigue, denotamos por π^S a las probabilidades estacionarias del subsistema S , que se calculan de acuerdo a las ecuaciones de balance y normalización conocidas, y suponemos que se cumplen las condiciones de régimen estacionario.

2. Descuento promedio:

$$D = w \frac{L}{\lambda}$$

En que L es el número promedio de llamadas en el sistema:

$$L = L_v + L_c + L_o$$

L_v es el número promedio de llamadas en un sistema $M/M/10$ con tasa de entrada λ_v y tasa de atención de un servidor de μ_v .

L_c es el número promedio de llamadas en un sistema $M/M/\infty$ con tasa de entrada λ_c y tasa de atención de un servidor de μ_c .

L_o es el número promedio de llamadas en un sistema $M/M/1$ con tasa de entrada λ_o y tasa de atención de un servidor de μ_o .

3. La condición es:

$$\sum_{i=11}^{\infty} (i-10)\pi_i^{Ventas} + \sum_{i=2}^{\infty} (i-1)\pi_i^{Otros} < 10$$

4. ■ Suponiendo que $\sum_{i=11}^{\infty} (i-10)\pi_i^{Ventas} < 10$, pero que la meta anterior no se cumple, sí puede ser útil contar con un telefonista adicional en el módulo *Otros*, porque el largo promedio del número de clientes con llamada en espera en este módulo se reduciría al de una $M/M/2$, que es menor al de una $M/M/1$.
- El número promedio de clientes que finalizan su atención por unidad de tiempo en el módulo *Otros*, al cumplirse la condición de régimen estacionario, no depende de las tasas de atención, sino de parámetros exógenos del sistema (tasas de entrada), por lo tanto, ninguna de las dos medidas es útil.

5.

$$I = \frac{\sum_{i=0}^9 (10-i)\pi_i^{Ventas}}{10}$$

6. Sea P_d la probabilidad de que el supervisor encuentre al menos un telefonista desocupado en una visita y, por lo tanto, registre una *observación*. Se tiene que:

$$P_d = \pi_0^{Otros} + \sum_{i=0}^9 \pi_i^{Ventas} - (\pi_0^{Otros}) \left(\sum_{i=0}^9 \pi_i^{Ventas} \right)$$

Luego, la probabilidad de que haga un sugerencia es:

$$P(\text{Sugerencia}) = \sum_{k=3}^{12} \binom{12}{k} P_d^k (1-P_d)^{12-k}$$

7. Actualmente, la probabilidad de que un cliente cualquiera que accede al módulo *Ventas* deba esperar es:

$$P_a = \sum_{i=10}^{\infty} \pi_i^{Ventas}$$

Si se agregan X nuevas telefonistas, atendiendo a la misma tasa, se tendría una nueva probabilidad P'_a igual a:

$$P(X) = \sum_{i=10+X}^{\infty} \pi_i^{Ventas}$$

Luego, basta encontrar X^* tal que:

$$X^* = \text{Min}\{X : P(X) \leq \frac{P_a}{2}\}$$

Problema 2

1. Como la suma de dos v.a. normales independientes es una v.a. normal cuya media es la suma de las medias de las v.a. sumadas y su varianza la suma de las varianzas de las v.a. sumadas, es claro que:

$$B(t) + C(t) \rightsquigarrow N(0, 2t)$$

Además,

$$D(t) = \gamma \cdot (B(t) + C(t)) \rightsquigarrow N(\gamma \cdot 0, \gamma^2 \cdot 2t) = N(0, 2\gamma^2 t)$$

Luego, para que $D(t)$ tenga distribución normal de media 0 y varianza t , debe cumplirse:

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

Para que $D(t)$ sea un browniano estándar, es necesario además que:

$$Cov(D(t), D(s)) = \min\{t, s\}$$

Comprobemos que la condición anterior es cierta para $\gamma = \frac{1}{\sqrt{2}}$.

$$\begin{aligned} Cov(D(t), D(s)) &= Cov\left(\frac{1}{\sqrt{2}}(B(t) + C(t)), \frac{1}{\sqrt{2}}(B(s) + C(s))\right) \\ &= \frac{1}{2}(Cov(B(t), B(s)) + Cov(B(t), C(s)) + Cov(B(s), C(t)) + Cov(C(t), C(s))) \\ &= \frac{1}{2}(\min\{t, s\} + \min\{t, s\}) \\ &= \min\{t, s\} \end{aligned}$$

Como $B(t)$ y $C(t)$ son v.a. independientes $Cov(B(t), C(s)) = 0 \forall t, s$.

2. Dado que el precio de la acción de *RilShiss* es un browniano con drift positivo, y dado que Armijo espera a que el precio de la acción sea primero $A > P_0$ y después alcance B , es necesario que estando en A se alcance el valor B con certeza ($P[B \text{ estando en } A] = 1$), esto ocurre *ssi* $B \geq A$.
3. Definiendo:

$$X(t) = P(t) - P_0$$

y

$$f(y) \equiv E[\tau_y]$$

$$\tau_y = \inf\{t | X(t) = y\}$$

Se pide calcular $E[f(B - P_0)]$ (ya que se cumple la condición de la parte 2).

$$\begin{aligned} f(y) &= E[\tau_y] \\ &= E[E_{Z_h}[h + \tau_{y-Z_h} | Z_h]] \\ &= h + E_{Z_h}[f(y - Z_h) | Z_h] \\ &= h + E_{Z_h}[f(y) - Z_h f'(y) + \frac{Z_h^2}{2} f''(y) + o(h) | Z_h] \\ &= h + f(y) - (\mu h) f'(y) + \frac{h + h^2 \mu^2}{2} f''(y) + o(h) \end{aligned}$$

Restando, dividiendo por h y tomando límite cuando $h \rightarrow \infty$:

$$\begin{aligned} 0 &= h - (\mu h) f'(y) + \frac{h + h^2 \mu^2}{2} f''(y) + \frac{o(h)}{h} \\ &= 1 - \mu f'(y) + \frac{1}{2} f''(y) \end{aligned}$$

Como debe cumplirse que $\tau_{a+b} = \tau_a + \tau_b$, es razonable suponer que $f(y) = \beta \cdot y$.

De esta forma

$$0 = 1 - \mu\beta + \frac{1}{2}0$$

Luego,

$$\beta = \frac{1}{\mu}$$

Y la esperanza del tiempo en que Armijo vende sus acciones es:

$$f(B - P_0) = \frac{B - P_0}{\mu}$$

4. Dado que Armijo compra las acciones de *RilShiss* a $P_0[\$]$ la unidad y dispone de $K[\$]$ para gastar en acciones, la cantidad de acciones que compra es (asumiendo que se puede comprar una cantidad fraccionaria de acciones):

$$\frac{K}{P_0}$$

En estricto rigor, es correcto considerar el cajón inferior de la magnitud anterior.

Como vende todas esas acciones a precio B , el monto disponible para comprar bonos, que corresponde a BG_0 , es:

$$BG_0 = B \frac{K}{P_0}$$

5. Notar que $E[I_A] = E[BG_A] - BG_0$ por lo que en el fondo se pide calcular:

$$E[BG_A] = \frac{K}{G} E[e^{\alpha \tau_{B-P_0}}]$$

Notar que $E[e^{\alpha \tau_{B-P_0}}] \neq e^{\alpha E[\tau_{B-P_0}]} = e^{\alpha f(B-P_0)}$ ya que en general $E[f(z) \neq f(E[z])]$ la igualdad es cierta $\forall z$ ssi $f(z)$ es lineal.

Para este cálculo se procede de forma análoga al caso anterior.

Definiendo:

$$X(t) = P(t) - P_0$$

$$\tau_y = \inf\{t | X(t) = y\}$$

$$f(\alpha, y) = E[e^{\alpha \tau_y}]$$

Se forma una ecuación diferencial:

$$\begin{aligned} f(\alpha, y) &= E[e^{\alpha \tau_y}] \\ &= E[E_{Z_h}[e^{\alpha(h+\tau_y-Z_h)} | Z_h]] \\ &= E[e^{\alpha h} \cdot E_{Z_h}[e^{\alpha(\tau_y-Z_h)} | Z_h]] \\ &= E[e^{\alpha h} \cdot f(y - Z_h) | Z_h] \\ &= E[(f(\alpha, y) - Z_h f'(\alpha, y) + \frac{Z_h^2}{2} f''(\alpha, y) + o(h))(1 + \alpha h + o(h)) | Z_h] \\ &= f(\alpha, y) + f(\alpha, y) \alpha h - \mu h f'(\alpha, y) + \frac{h + \mu^2 h^2}{2} f''(\alpha, y) + o(h) \end{aligned}$$

Restando, dividiendo por h y tomando límite cuando $h \rightarrow \infty$:

$$\begin{aligned} 0 &= f(\alpha, y) \alpha - \mu f'(\alpha, y) + \frac{1 + \mu^2 h}{2} f''(\alpha, y) + \frac{o(h)}{h} \\ &= f(\alpha, y) \alpha - \mu f'(\alpha, y) + \frac{1}{2} f''(\alpha, y) \end{aligned}$$

Como es razonable asumir que $\tau_{a+b} = \tau_a + \tau_b$ se puede asumir también que¹ $f(\alpha, a+b) = f(\alpha, a) \cdot f(\alpha, b)$

¹ $E[e^{a+b}] = E[e^a] \cdot E[e^b]$

Luego, $f(\alpha, y) = c \cdot e^{g(\alpha)y}$ para algún c y $g(\alpha)$.

Como $f(\alpha, 0) = 1$ debe cumplirse que $c = 1$, de esta forma:

$$I_A = f(\alpha, B - P_0) - B \frac{K}{P_0}$$

Se considera correcta la pregunta hasta este punto, sin necesidad de obtener una expresión explícita para $g(\alpha)$.

Dudas y/o errores:

Mario Guajardo
mguajard@ing.uchile.cl

Daniel Yung
dyung@ing.uchile.cl