# Tarea 3

30 de Octubre de 2008

**P1** La llegada de clientes a un banco sigue un proceso de poisson de tasa $\lambda$ . Una vez dentro del banco los clientes se encuentran frente a dos sistemas M/M/ 1, y deben elegir a que cola colocarse. Lógicamente los clientes siempre escogerán la cola que tenga el menor largo y ante empates elegirán equiprobabilísticamente.

Adicionalmente, una vez que eligen la cola a la que se colocan no pueden cambiar su eleccin. Suponga que los tiempos de atencin son iguales en ambos sistemas, y exponencialmente distribuidos de media $\frac{1}{\mu}$.

*a*) Modele el número de personas en cada cola como una cadena de Markov en tiempo continuo. Explicite claramente todas las transiciones posibles indicando las tasas respectivas, ¿Cuál es la condicin de estacionaridad?.

*b*) Escriba las ecuaciones que le permitiran encontrar la distribución de probabilidades estacionarias.

*c*) Encuentre la fracción del tiempo que la cola 1 se encuentra sin clientes. Hint : Escriba una ecuación diferencial para el número esperado de personas en el sistema y razone por simetría.

*d*) Compare la eficiencia de este sistema con la modalidad de çola única".

*e*) ¿Qué modificaciones realizaría al modelo si permitiese que los clientes que ya ingresaron al sistema pudiesen cambiarse de cola ante diferencias en el largo de estas?. Explique claramente sus supuestos, ¿Cómo se compara este sistema con un M/M/2?.

**P2** Un servicio que emite certificados de sanidad funciona de la forma que se describe a continuación.

Los interesados en el certificado llegan a la oficina de certificados según un proceso de Poisson de tasa $\lambda$[personas/hora].

Las personas que ingresan al servicio son atendidas por un burócrata. Con probabilidad $q$, e independiente de todo lo demás, el burócrata otorgara el documento sin pedir más documentación, con lo que los beneficiados se retiran felices del servicio. El tiempo de atención del burócrata se comporta como una variable aleatoria exponencial de parámetro $\mu_B$.

Las personas que no consiguen el certificado (con probabilidad $(1-q)$), deben dirigirse a un consultorio donde se les realizará una serie de análisis.

Todas las personas que llegan al consultorio deben pasar por el mesón donde son atendidos por **una** simpática recepcionista que, en tiempo distribuido como una v.a. exponencial de parámetro $\mu_M$, decide si deben realizar primero un test psicológico (con probabilidad $p$) o si pasan directamente al laboratorio médico.

El test psicológico demora un tiempo distribuido como una v.a. exponencial de parámetro $\mu_P$ y es realizado por **un** solo especialista. Luego del test todas las personas se dirigen al laboratorio médico.

En el laboratorio médico atienden **dos** doctores, atienden a los pacientes, que esperan formando una única fila. El tiempo de atención de cada doctor puede ser representado como una v.a. exponencial de parámetro $\mu_D$. Una vez terminada la visita al laboratorio médico cada persona regresa a la oficina del burócrata con la esperanza que esta vez les entregue el certificado.

El burócrata los recibe y nuevamente decide, como en el caso de las personas que llega a su oficina por primera vez, en tiempo distribuido como una v.a. exponencial de parámetro $\mu_B$, si les entrega el certificado (con probabilidad $q$) o si los manda de nuevo al consultorio (prob $(1-q)$).

*a*) (2,0 ptos.) Modele el servicio descrito como una red de colas.

*b*) (1,5 ptos.) Calcule las tasas efectivas de entrada a cada sistema y escriba las condiciones de estado estacionario.

*c*) (1,0 ptos.) Calcule el número promedio de usuarios dentro del sistema completo en estado estacionario.

*d*) (1,5 ptos.) Calcule el tiempo promedio que pasa un usuario dentro del sistema en estado estacionario.

**P3** Calcule el valor de

$$\int_0^t B_s dB_s$$

Para esto, divida el intervalo de integración en $N$ periodos de igual largo y aproxime la expresión anterior mediante una suma, considerando un valor "adecuado" para aproximar el valor de la función dentro de cada intervalo.

Muestre que la expresión obtenida depende de la aproximación realizada, inclusive cuando $N \to \infty$.

**P4** Considere un proceso $x(t)$ tal que:

$$dx = a(x,t)dt + b(x,t)dz$$

en que $dz$ es el incremento de un movimiento browniano y $a(x,t)$ y $b(x,t)$ son funciones conocidas (no aleatorias).[1]

*a*) Sea $F(x,t)$ una funcion diferenciable al menos dos veces en x y una en t. Muestre que:

$$dF = \left[\frac{\partial F}{\partial t} + a(x,t)\frac{\partial F}{\partial x} + \frac{1}{2}b^2(x,t)\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}\right] dt + b(x,t)\frac{\partial F}{\partial x}dz$$

**Hint:** Expandir $dF$ en una serie y notar que parte de $(dx)^2$ NO es despreciable para la variación infinitesimal $dt$.

*b*) Considere $a(x,t) = \alpha x; b(x,t) = \sigma x$; $F(x) = ln(x)$. Muestre que para cualquier intervalo finito de tiempo de largo $T$, se cumple

$$dF \to N\left(\left(\alpha - \frac{1}{2}\sigma^2\right)T, \sigma^2 T\right)$$

**P5** Sea $B_t$ un movimiento Browniano estándar.

*a*) Pruebe que

$$E[e^{cB_t}] = exp(-\frac{1}{2}c^2 t) \quad \forall\, c \in \mathbb{R}$$

*b*) Utilizando una expansión de serie para la función exponencial, argumente que

$$E[B_t^{2k}] = \frac{(2k)!}{2^k k!}t^k \quad k \in \mathbb{N}$$

*c*) Dado que

$$E[f(x)] = \frac{1}{\sqrt{2\pi t}}\int_{\mathbb{R}} f(x)e^{-\frac{x^2}{2t}}dx$$

Utilice la función $f(x) = x^{2k}$, inducción matemática e integración por partes para corroborar los resultados de la parte anterior.

[1] El proceso $x(t)$, generalización de un browniano, es llamado proceso de Ito.

**P6** Sea $\{B(t), t \geq 0\}$ un movimiento Browniano estándar y consideremos $Y(t) = \exp(cB(t) - \frac{c^2 t}{2})$.

*a*) Demuestre que $E[Y(t)|Y(u) : 0 \leq u \leq s \leq t] = Y(s)$

Sea $X(t)$ un movimiento Browniano con drift $\mu$. Ahora considere $T = \min\{t : X(t) = A \quad o \quad X(t) = -B\}$ con $A \geq 0$ y $B \geq 0$.

*b*) Encuentre una expresión para $E[T]$.

*c*) Utilice lo anterior para probar que cuando $\mu < 0$

$$P[\text{Un movimiento Browniano toca alguna vez A}] = e^{2\mu A}$$

para $A \geq 0$.

---

**Observaciones:**

- *Fecha de Entrega:* Viernes 28 de Noviembre.
- Entregar preguntas en grupos de hojas separadas y corcheteadas. Cada grupo debe indicar el nombre del alumno.

Gustavo Angulo — gangulo@dim.uchile.cl
Diego Morán — dmoran@dim.uchile.cl