FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICAS Y MATEMÁTICAS UNIVERSIDAD DE CHILE

IN790: Modelos Estocásticos en Sistemas de Ingeniería
Profesor : Raúl Gouet
Auxiliares : Gustavo Angulo, Diego Morán

Clase Auxiliar 9

22 de Octubre de 2008

P1 Un centro de información telefónica cuenta con dos telefonistas cuyo tiempo de atención de llamadas es idénticamente distribuido y corresponde a una distribución exponencial de media igual a 1 minuto.

Dado que la operación de este call center está recién comenzando, no se cuenta con suficientes datos históricos como para determinar la distribución de probabilidad de la entrada de llamadas, aunque se puede suponer que los tiempos entre éstas son exponenciales. Además, en los pocos días de funcionamiento se ha advertido que el 10 % del tiempo ambas operadoras están desocupadas.

Si una persona llama y ambas operadoras están ocupadas su llamada quedará en espera hasta que alguna se desocupe y pueda atenderlo. Suponiendo que no existe una restricción sobre el número de llamadas que pueden quedar en espera, y que los clientes son infinitamente pacientes, responda:

a) ¿Qué condición hay que imponer sobre la tasa de entrada de llamadas para que exista estado estacionario?.

b) Determine la tasa de entrada de llamadas (λ).

c) Calcule el número promedio de llamadas en espera y el tiempo promedio de espera de un cliente antes de ser atendido.

Suponga ahora que las operadoras cuando ven que hay llamadas en espera apuran las atenciones. Los tiempos de atención siguen siendo variables aleatorias exponenciales, pero ahora la tasa con que una operadora atiende a un cliente cuando hay i clientes esperado es $i \cdot \mu$.

d) ¿Qué condición hay que imponer sobre la tasa de entrada de llamadas para que exista estado estacionario?.

e) Determine la ecuación que permitiría calcular la tasa de entrada de llamadas λ.

Sol: *a*) Como se trata de un sistema $M/M/c$, la condición pedida es $\lambda < c\mu$, que en este caso corresponde a $\lambda < 2\mu$.

b) Del enunciado, $p_0 = \frac{1}{10}$. Además

$$p_0^{-1} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \prod_{i=1}^{n} \frac{\lambda_{i-1}}{\mu_i}$$

Luego

$$10 = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda^n}{2^{n-1}\mu^n} = 1 + 2\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\lambda}{2}\right)^n = 1 + \frac{2\lambda}{2-\lambda}$$

$$\implies \quad \lambda = \frac{18}{11}$$

c) Usando las relaciones de Little para $M/M/c$

$$L_q = \left[\frac{\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^c \lambda\mu}{(c-1)!(c\mu-\lambda)^2} \right] p_0 = \frac{\lambda^3}{(2-\lambda)^2} = \frac{\left(\frac{18}{11}\right)^3}{\left(\frac{4}{11}\right)^2} \frac{1}{10}$$

$$W_q = \frac{L_q}{\lambda} = \left(\frac{9}{2}\right)^2 \frac{1}{10}$$

d) La condición general es $\sum_{n=1}^{\infty}\prod_{i=1}^{n}\frac{\lambda_{i-1}}{\mu_i}<\infty$. Notar que

$$u_n=\begin{cases} n\mu & n\leq 2 \\ 2(n-2)\mu & n>2 \end{cases}$$

Luego

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{\infty}\prod_{i=1}^{n}\frac{\lambda_{i-1}}{\mu_i} &= \frac{\lambda}{\mu}+\frac{\lambda^2}{2\mu^2}+\sum_{n=3}^{\infty}\frac{\lambda^n}{2^{n-1}\mu^n}\prod_{i=3}^{n}\frac{1}{i-2} \\
&= \lambda+\frac{\lambda^2}{2}+\sum_{n=3}^{\infty}\frac{\lambda^n}{2^{n-1}}\prod_{i=1}^{n-2}\frac{1}{i} \\
&= \lambda+\frac{\lambda^2}{2}+\sum_{n=3}^{\infty}\frac{\lambda^n}{2^{n-1}(n-2)!} \\
&= \lambda+\frac{\lambda^2}{2}+\frac{\lambda^2}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\lambda^n}{2^n n!} \\
&= \lambda+\frac{\lambda^2}{2}+\frac{\lambda^2}{2}\left(1-e^{\frac{\lambda}{2}}\right)<\infty
\end{aligned}$$

Así, no hay condiciones adicionales sobre λ para la existencia de estado estacionario.

e) De lo anterior, es directo que la ecuación es

$$10=1+\lambda+\frac{\lambda^2}{2}+\frac{\lambda^2}{2}\left(1-e^{\frac{\lambda}{2}}\right)$$

P2 Considere una cola M/G/1 cuya disciplina de atención es LCFS (último que llega, primero en atenderse). Es decir, clientes llegan según un proceso de Poisson de tasa λ y la llegada de un cliente interrumpe al cliente que se está atendiendo para atenderse. Cuando su servicio termina, el cliente que se estaba atendiendo y fue interrumpido, retoma su servicio desde donde había quedado. Los tiempos de atención son variables aleatorias X_i i.i.d. de media $E(X)$. Suponga que $\lambda\cdot E(X)<1$.

a) Encuentre el tiempo medio entre períodos ocupados (el tiempo transcurrido hasta una nueva llegada después que el sistema se vacía).

b) Encuentre la fracción promedio de tiempo que el sistema está ocupado.

c) Encuentre el tiempo medio de duración de un período ocupado ($E(B)$). Indicación: use (a) y (b).

d) Explique por qué un cliente que comienza un período ocupado, se queda en el sistema por toda la duración de éste. Use lo anterior para encontrar el tiempo medio de permanencia en el sistema, de un cliente que llega cuando el sistema está vacío.

e) ¿Existe alguna dependencia estadística entre el tiempo de permanencia en el sistema de un cliente y el número de clientes dentro del sistema a su llegada?

f) Muestre que el tiempo medio de permanencia de un cliente en el sistema es igual a $E(B)$. Indicación: Utilice sus respuestas de (d) y (e).

g) Sea C el tiempo medio de permanencia de un cliente en el sistema condicional en que su tiempo de atención X es 1. Encuentre (en términos de C) el tiempo medio de permanencia de un cliente en el sistema, condicional en $X=2$. Indicación: compare un cliente con $X=2$ con dos clientes con $X=1$. Extienda para un valor arbitrario de X.

h) Encuentre la constante C. Indicación: Use (f) y (g), sin realizar cálculos tediosos.

`Sol:` *a*) Claramente es $\frac{1}{\lambda}$.

b) Sea S_B el evento sistema ocupado. Tenemos que $p_0 = 1 - \lambda E(X)$, luego

$$P(S_B) = 1 - p_0 = \lambda E(x)$$

c) Viendo lo anterior como un sistema alternante

$$P(S_B) = \frac{E(B)}{\frac{1}{\lambda} + E(B)}$$

Luego

$$\lambda E(x) = \frac{E(B)}{\frac{1}{\lambda} + E(B)}$$

$$\Longrightarrow \quad E(B) = \frac{E(X)}{1 - \lambda E(X)}$$

d) Un período ocupado termina cuando el primer cliente que llegó cuando el sistema estaba vacío se retira. Por lo tanto, una persona que llega al inicio debe esperar en promedio $E(B)$ en el sistema.

e) El tiempo de permanencia de una persona depende de su tiempo de servicio y de las personas que lleguen después, pero no de las que hayan llegado antes. Luego, su tiempo de permanencia es independiente de todo el pasado.

f) Sea T el tiempo de permanencia de una persona en el sistema y sea N la cantidad de personas en el sistema a su llegada.

$$E(T) = \sum_{k=0}^{\infty} E(T|N = k)P(N = k) = E(B)$$

g) Usando renovaciones en intervalos fijos de largo 1 y recordando que la llegada de clientes es Poisson, tenemos que

$$E(T|X = 2) = 2E(T|X = 1) = 2C$$

En general

$$E(T|X = t) = tC$$

h) Usando lo anterior

$$E(T) = \int_0^{+\infty} E(T|X = t)dX(t) = \int_0^{+\infty} tCdX(t) = CE(X)$$

Luego

$$C = \frac{E(T)}{E(X)} = \frac{E(B)}{E(X)} = \frac{1}{1 - \lambda E(X)}$$

Gustavo Angulo Diego Morán
gangulo@dim.uchile.cl dmoran@dim.uchile.cl