IN79O: Modelos Estocásticos en Sistemas de Ingeniería
Profesor : Raúl Gouet
Auxiliares : Gustavo Angulo, Diego Morán

# Control 2

15 de Octubre de 2008

**P1** *a)* Sea $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de v.a. i.i.d. con valores en $A = \{1, \dots, N\}$, tal que $\mathbb{P}(Y_1 = k) = \frac{1}{N}$, $\forall\, k \in A$. Considere la nueva sucesión $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ definida por $X_n = \text{máx}\{Y_k \ : \ 0 \le k \le n\}$, $n \in \mathbb{N}$.

i) (1 pto.) Pruebe que $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una ***cadena de markov***. Además, calcule los coeficientes $p_{ij}$ de su matriz de transición $P$

ii) (0,5 pto.) Sea $P^{(n)}$ la matriz de transición en $n$ etapas y $p_{ij}^{(n)}$ sus coeficientes. Encuentre una ecuación (recurrencia) que relacione los coeficientes $p_{ij}^{(n)}$ con los $p_{ij}^{(n-1)}$.

iii) (1 pto) Demuestre que $p_{ii}^{(n)} = \left(\frac{i}{N}\right)^n$ para $i \in A$ y $p_{ij}^{(n)} = \left(\frac{j}{N}\right)^n - \left(\frac{j-1}{N}\right)^n$ para $i, j \in A, i < j$.

*b)* Suponga que estamos en el semestre *Primavera 2009* y que usted, como alumno aprobado con excelencia del curso $IN79O$, logra convertirse en el nuevo auxiliar del susodicho ramo. Además, usted tiene mucha suerte y la pregunta que aparece más arriba (y que respondió correctamente en 2008) es justo la pregunta que le toca corregir en el $C2$ de 2009 (la llamaremos *P3C2-2009*).

Su estilo de corregir las pruebas de sus $M$ alumnos es muy particular. Comienza tomando la prueba del alumno 1. Se sabe que cada vez que toma la prueba del alumno $i$, con $1 \le i \le M - 1$, existe una probabilidad $p \in [0, 1]$ de avanzar a la prueba del alumno $i + 1$ y una probabilidad $(1 - p)$ de devolverse a la prueba del alumno $i - 1$. La primera vez que toma la prueba de un alumno usted le asigna, independiente de todo lo demás, y con probabilidad $q_j$, una nota $j \in \{2.0, 3.0, \dots, 7.0\}$. Cada vez que vuelve a pasar por la prueba de un alumno le baja una décima (la nota *puede* ser *negativa*). Si llega a la prueba del alumno $M$, le pone la nota correspondiente y el proceso de corrección termina. Por otro lado, si está en la prueba del alumno 1 y "se devuelve" entonces a todos los alumnos que no les ha puesto nota todavía les pone un 1.0 y finaliza la corrección.

i) (1.0 pto) Modele el *paso de una prueba a otra* como una ***cadena de markov***[1]. Dibuje el grafo correspondiente, identifique las clases y clasifique sus estados.

ii) (0.5 ptos) Calcule la probabilidad de que el alumno $M$ obtenga una nota estrictamente superior a 1.0 en la *P3C2-2009*.

iii) (1.0 pto) Calcule la nota esperada del alumno $M$ en la *P3C2-2009*.

Ahora suponga que el curso sólo tiene 4 alumnos, es decir, $M = 4$ y que $p = \frac{1}{2}$. Se definen las cantidades $m_{ij}$:*el número esperado de veces que Ud. pasa por la prueba del alumno $j$ durante el proceso de corrección dado que parte corrigiendo al alumno $i$*, con $i, j \in \{1, \dots, M\}$.

iv) (0.5 ptos) Determine $m_{1i}$ con $1 \le i \le 3$

v) (1.0 ptos) Calcule las notas esperadas de los alumnos 1 y 2 en la *P3C2-2009*.

vi) (0.5 ptos) Calcule el tiempo esperado de corrección (número de pasos).

[1] Para esta modelación no debe considerar las probabilidades $q_j$.

**P2** El otrora alumno y ahora auxiliar del curso, luego de tomar un control del mismo, decide ir a ver el partido de la selección chilena de fútbol ante uno de sus rivales en las clasificatorias. Ambos equipos tienen $N$ jugadores. El director técnico de La Roja ha decidido promover el juego colectivo, por lo que cuando un jugador chileno tiene la pelota, dará un pase luego de un tiempo exponencial de parámetro $\alpha$, siendo el destinatario elegido de forma equiprobable entre sus compañeros. De este modo, el equipo rival nunca tiene la posesión del balón. Lamentablemente, este esquema desgasta a los jugadores chilenos y perturba a sus rivales. Cada jugador chileno juega bien durante un tiempo exponencial de parámetro $\lambda$, pasando entonces a jugar mal durante un tiempo exponencial de parámetro $\mu$, luego del cual vuelve a jugar bien. Además, cuando un jugador chileno recibe una falta grave, pasa a estar lesionado, independientemente de cómo haya estado jugando. Un jugador lesionado, el cual sigue jugando a pesar de su estado, se recupera después de un tiempo exponencial de parámetro $\nu$, luego del cual pasa a jugar bien. Cada jugador rival esperará un tiempo exponencial de parámetro $\theta$ antes de cometer una falta grave, afectando de forma equiprobable a cualquiera de los jugadores chilenos que no estén lesionados.

Sea $i \in I = \{1 \dots N\}$ el conjunto de jugadores. Sea $\{Z(t) : t \geq 0\}$ un proceso que indica qué jugador tiene la pelota.

*a*) (1.0 pto) Represente $\{Z(t) : t \geq 0\}$ como una cadena de Markov a tiempo continuo. Explicite estados, transiciones y tasas.

*b*) (1.0 pto) Calcule la probabilidad que el jugador $j$ tenga la pelota en el instante $t$ dado que el partido lo inicia el jugador $i$.

Indicación: Utilice las ecuaciones de Kolmogorov forward y recuerde que una ecuación de la forma $y'(t) + \beta y(t) = f(t)$ tiene por solución general $y(t) = e^{-\beta t} \int_0^t e^{\beta s} f(s) ds + K e^{-\beta t}$

*c*) (1.0 pto) Argumente la existencia de una distribución estacionaria para $\{Z(t) : t \geq 0\}$, plantee el sistema de ecuaciones que permite obtenerla y encuéntrela.

Sean $X(t)$ e $Y(t)$ las cantidades de jugadores que están jugando bien y mal, respectivamente, en el instante $t$. Sea $E(t)$ es estado del jugador $i$ en el instante $t$.

*d*) (1.0 pto) Represente $\{(X(t), Y(t)) : t \geq 0\}$ como una cadena de Markov a tiempo continuo. Explicite estados, transiciones y tasas.

*e*) (1.0 pto) ¿Son $\{E(t) : t \geq 0\}$, $\{Y(t) : t \geq 0\}$, $\{X(t) + Y(t) : t \geq 0\}$, $\{(E(t), Y(t)) : t \geq 0\}$ y $\{(E(t), X(t) + Y(t)) : t \geq 0\}$ cadenas de Markov? Argumente brevemente.

Suponga que conoce las matrices de transición $P(t)$ y $R(t)$ de $\{Z(t) : t \geq 0\}$ y $\{(X(t), Y(t)) : t \geq 0\}$, respectivamente. Sean $(P_i)$ y $(R_{n,m})$ las distribuciones iniciales respectivas. Sea $D \subset I$ el conjunto de delanteros de la selección. Decimos que Chile está en posición de gol en el instante $t$ si en ese momento todos los jugadores están jugando bien, o si al menos $L$ están jugando bien y la pelota la tiene un delantero.

*f*) (1.0 pto) Entregue una expresión para la probabilidad de encontrar a Chile en posición de gol en el instante $t$ y condiciones suficientes para que esta probabilidad se mantenga constante durante todo el partido.

*g*) (0.5 pto) Sea $G(t)$ la variable aleatoria que indica si Chile está o no en posición de gol en el instante $t$. ¿Es $\{G(t) : t \geq 0\}$ una cadena de Markov a tiempo continuo? Justifique.

---

- Duración del control: 2.5 horas
- Responda cada preguntas en grupos separados de hojas
- Buena Suerte!