

Clase Auxiliar 8

8 DE OCTUBRE DE 2008

P1 La impresión de documentos foliados se suele llevar a cabo en dos fases: primero una de impresión fija en que se imprime el contenido fijo de los documentos y una de impresión variable en que se imprime el folio. Considere entonces un taller de impresión que cuenta con dos impresoras, una para cada tarea.

El tiempo que demora la impresora de contenido fijo en imprimir una hoja es una v.a. exponencial de media $1/\lambda[\text{min}]$ y el tiempo que funciona continuamente sin fallar es una v.a. exponencial de media $1/\alpha[\text{min}]$.

Por su parte, el tiempo que demora la impresora de contenido variable en completar la impresión de una hoja es una v.a. exponencial de media $1/\mu[\text{min}]$ y el tiempo que funciona continuamente sin fallar es una v.a. exponencial de media $1/\gamma[\text{min}]$.

Cuando una máquina falla, independiente de cuál se trate, es enviada inmediatamente a reparaciones y vuelve a estar funcionando en un tiempo exponencialmente distribuido de media $1/\delta[\text{min}]$. Considere que se cuenta con dos reparadores, por lo tanto, cada vez que una máquina falla, comienza inmediatamente su reparación.

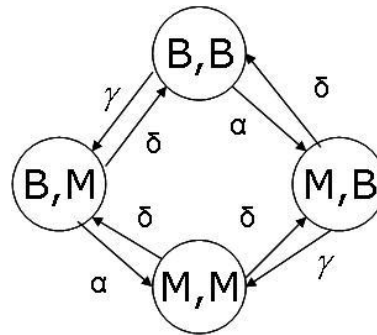
Supondremos que en el área fija SIEMPRE hay hojas por imprimir (la carga de trabajo es continua y cargar una hoja “siempre” demora menos que imprimir una). En tanto, la impresora de contenido variable recibe como *input* las hojas que han salido de la impresora fija.

Cada impresora sólo puede imprimir una hoja a la vez.

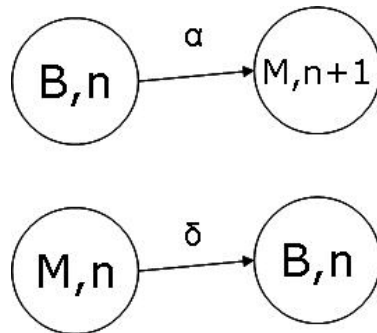
- a) (0.7 pts.) Definimos el conjunto $E = \{B, M\}$ que contiene los estados posibles en que se puede hallar cada máquina, siendo $B = Buena$ y $M = Mala$. Si EF y EV denotan al estado de la impresora fija y la impresora variable en el tiempo, respectivamente, ¿Es $\{(EF, EV)_t\}$ una cadena de Markov en tiempo continuo? Si su respuesta es afirmativa, explique claramente por qué, defina sus estados y entregue expresiones para las tasas de transición; si su respuesta es negativa, explique claramente por qué y especifique qué información adicional se requeriría para que sí lo fuera.
- b) (0.7 pts.) Diremos que ocurre un registro cada vez que la impresora de contenido fijo ha completado la impresión de 5 hojas en forma continua, sin fallar. Sea R_t el número de registros acumulados hasta el instante t . ¿Es $\{(EF, R)_t\}$ una cadena de Markov en tiempo continuo? Si su respuesta es afirmativa, explique claramente por qué, defina sus estados y entregue expresiones para las tasas de transición; si su respuesta es negativa, explique claramente por qué y especifique qué información adicional se requeriría para que sí lo fuera.
- c) (0.7 pts.) Sea NF_t el número acumulado de veces que la impresora de contenido fijo ha fallado hasta el instante t . ¿Es $\{(EF, NF)_t\}$ una cadena de Markov en tiempo continuo? Si su respuesta es afirmativa, explique claramente por qué, defina sus estados y entregue expresiones para las tasas de transición; si su respuesta es negativa, explique claramente por qué y especifique qué información adicional se requeriría para que sí lo fuera.
- d) Sea NH_t el número de hojas que se encuentran en el área de impresión variable en el instante t (incluida la que se está imprimiendo, si es que efectivamente hay hojas en esta área).
 - 1) (1.0 pto.) Modele $\{(EF, EV, NH)_t\}$ como una cadena de Markov en tiempo continuo.
 - 2) (0.5 pts.) ¿Qué condición se debe cumplir para que esta cadena admita régimen estacionario?
 - 3) (1.0 pto.) Asumiendo que se cumple la condición anterior y que las probabilidades estacionarias son conocidas, responda:

- En el largo plazo, ¿Cuál es el número promedio de hojas por unidad de tiempo que terminan el proceso de impresión?
 - En el largo plazo, ¿Cuál es el número promedio de hojas a la espera de ser impresas en el área de impresión variable?
- 4) (1.4 pts.) Suponga que el operario de la impresora de contenido fijo es premiado con un bono inicial si consigue imprimir 15 mil hojas sin fallar. Luego obtiene otro bono por cada 5 mil hojas impresas de forma continua. Después del quinto bono, el operario es promovido a labores superiores y se contrata un nuevo operario para la impresión fija. Por el contrario, si la impresora fija falla en algún momento, el trabajador en curso es despedido y reemplazado por un nuevo operario.
- ¿Cuál es el número esperado de bonos que recibe un operario?
 - ¿Cuál es el número esperado de operarios distintos que operan la máquina de impresión fija en una unidad de tiempo?
 - ¿Cuál es el número esperado de operarios distintos que operan la máquina de impresión fija hasta que alguno es promovido a labores superiores?

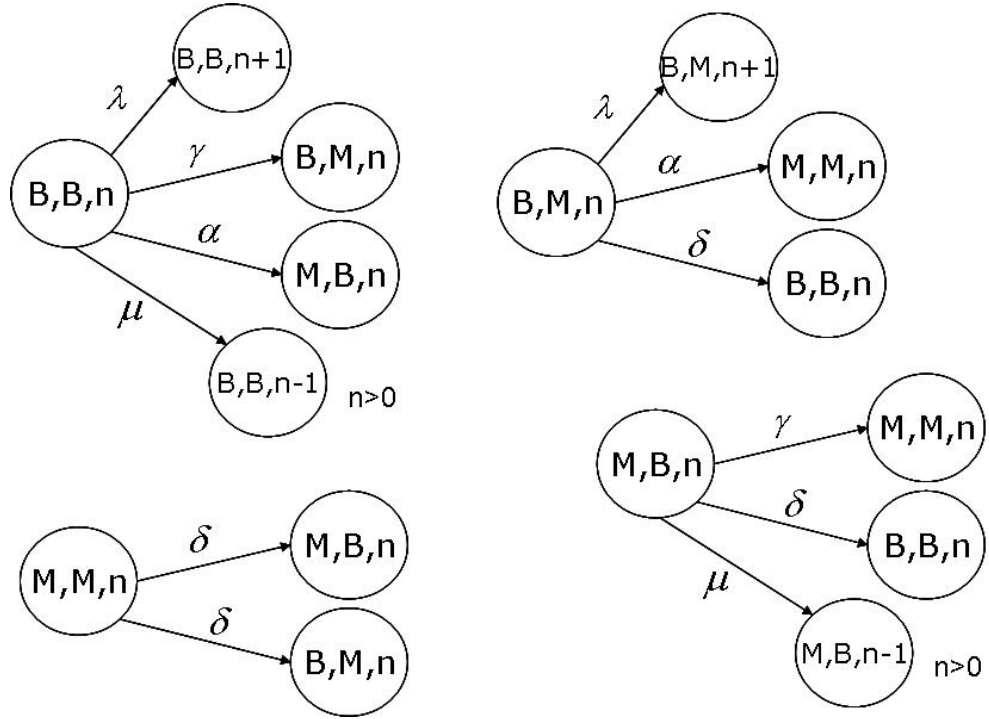
Sol: a) Sí es una cadena de Markov en tiempo continuo pues los tiempos de permanencia en cada estado son v.a. exponenciales. El conjunto de estados es $\{(B, B), (M, B), (B, M), (M, M)\}$. Las tasas de transición se especifican en la siguiente figura:



- b) No es una cadena de Markov en tiempo continuo, pues la permanencia en un estado para la componente R_t no es una v.a. exponencial, es una gama (que no tiene pérdida de memoria). Se podría agregar una componente que especifique el número de hojas consecutivos que impresas por la impresora fija y, en tal caso, se tendría una CMTC.
- c) Sí es una CMTC, pues los tiempos de permanencia en cada estado son v.a. exponenciales. El conjunto de estados es $\{(B, n), (M, n)/n \in \mathbb{N}\}$. Las tasas de transición se especifican en la siguiente figura:



- d) 1) Los estados y tasas de transición se especifican en los grafos siguientes:



- 2) Es claro que lo relevante es analizar el posible atochamiento que se pueda producir en la espera de impresiones en la impresora variable. Se debiera cumplir que en promedio la tasa de despacho de hojas desde la impresora fija a la variable sea menor que la de despacho de trabajos terminados por la impresora variable. Para ello ponderamos las tasas de impresión de cada una y las ponderamos por la fracción de tiempo que en promedio permanecen funcionando correctamente:

$$\lambda \left(\frac{\alpha}{\alpha + \delta} \right) < \mu \left(\frac{\gamma}{\gamma + \delta} \right)$$

3) ■

$$E(\text{hojas listas}) = \mu \sum_{n \geq 1} \pi_{B,B,n} + \pi_{M,B,n}$$

■

$$E(\text{hojas en espera}) = \sum_{n \geq 2} (n-1)(\pi_{B,B,n} + \pi_{M,B,n}) + \sum_{n \geq 1} n(\pi_{B,M,n} + \pi_{M,M,n})$$

- 4) ■ Sean p_i la probabilidad de obtener exactamente i bonos ($\sum_{i=0}^5 p_i = 1$) y q_k la probabilidad de imprimir correctamente k hojas consecutivas en la impresora de contenido fijo. Se tiene que:

$$q_k = \left(\frac{\lambda}{\lambda + \alpha} \right)^k$$

$$p_i = q_{15000} q_{5000}^{i-1} (1 - q_{5000}) \forall i \in \{1, \dots, 4\}$$

$$p_5 = q_{15000} q_{5000}^4$$

Luego, la respuesta es:

$$E(\text{Nro. Bonos}) = \sum_{i=1}^5 i p_i$$

- Sea HC_t el número de hojas impresas consecutivamente (sin que la máquina falle) hasta el instante t por el operario vigente en t y NB_t el número acumulado de bonos del operario vigente en t . Es claro que $\{(EF, HC, NB)_t : HC < 15000, NB < 5\}$ define una cadena de Markov a tiempo continuo. Esta cadena es finita e irreducible, por lo tanto, tiene probabilidades estacionarias, dadas por los $\pi_{EF, HC, NB}$ que resuelven el siguiente sistema:

$$\pi_{EF,HC,NB} \sum_{i,j,k} \lambda_{(EF,HC,NB),(i,j,k)} = \sum_{i,j,k} \pi_{i,j,k} \lambda_{(i,j,k),(EF,HC,NB)} \quad \forall (EF, HC, NB)$$

$$\sum_{EF,HC,NB} \pi_{EF,HC,NB} = 1$$

La respuesta a la pregunta es entonces:

$$E(\text{Nro. Operarios}) = 1 + \lambda \pi_{B,14999,4} + \sum_{0 \leq j \leq 14999} \alpha \pi_{B,j,0} + \sum_{0 \leq j \leq 4999, 1 \leq k \leq 4} \alpha \pi_{B,n,k}$$

- Basta notar que la v.a. “ser promovido a labores superiores” es una geométrica de parámetro p_5 . Luego, la respuesta es:

$$E(\text{Nro. Operarios hasta promoción}) = \frac{1}{p_5}$$

También se puede plantear una CMTD para responder esta pregunta.

P2 Una casa comercial ha decidido clasificar a sus clientes en 2 tipos: los tipo 1, *que recomiendan la tienda a sus amigos* y los tipo 2, *que no la recomiendan*. El gerente comercial sabe que cada uno de los clientes que recomiendan la tienda traerá un nuevo cliente luego de un tiempo aleatorio exponencialmente distribuido de tasa λ , el cual con probabilidad r será de tipo 1, y con probabilidad $(1 - r)$ será de tipo 2. Además, a esta casa comercial llegan clientes tipo 2 de manera exógena, según un proceso de Poisson de tasa θ .

Se sabe que un cliente del tipo 1 dejará de ser cliente de la casa comercial luego de un tiempo aleatorio, exponencialmente distribuido de tasa μ . De la misma manera, un cliente tipo 2 dejará de ser cliente luego de un tiempo aleatorio, exponencialmente distribuido de tasa ν .

- Modele la base de clientes de la casa comercial como una Cadena de Markov en Tiempo Continuo. Escriba explícitamente las tasas de transición. HINT: No es necesario que dibuje toda la cadena.
- Calcule $E[X_i(t)]$, donde $X_i(t)$ es una variable que indica el número de clientes tipo i que tiene la casa comercial en el tiempo T , $i = 1, 2$. Suponga que el gerente comercial está interesado en el estudio de la base de clientes en el largo plazo. Calcule la esperanza del número de clientes tipo 1 y del número de clientes tipo 2, en función de los parámetros del problema.

Sol: a) Denotemos $X(t)$ e $Y(t)$ las cantidades de clientes de tipo 1 y 2, respectivamente, en el instante t . Luego $\{(X(t), Y(t)) : t \geq 0\}$ es una Cadena de Markov en Tiempo Continuo con tasas:

$$\begin{aligned} q[(n, m), (n + 1, m)] &= n\lambda r \\ q[(n, m), (n - 1, m)] &= n\mu \\ q[(n, m), (n, m + 1)] &= n\lambda(1 - r) + \theta \\ q[(n, m), (n, m - 1)] &= m\nu \end{aligned}$$

- Notamos que $\{X(t) : t \geq 0\}$ es Cadena de Markov. Sea $M_x(t) = E[X(t)|X(0)]$. Veamos las transiciones entre t y $t + h$, condicional en $X(t)$, donde $h \rightsquigarrow 0$.

$$X(t + h) = \begin{cases} X(t) + 1 & \lambda r X(t)h + o(h) \\ X(t) - 1 & \mu X(t)h + o(h) \\ X(t) & 1 - (\lambda r + \mu)X(t)h + o(h) \end{cases}$$

Luego, tomando esperanza dos veces tenemos

$$\begin{aligned} E[X(t + h)|X(t)] &= X(t) + (\lambda r - \mu)X(t)h + o(h) \\ \implies M_x(t + h) &= M_x(t) + (\lambda r - \mu)M_x(t)h + o(h) \end{aligned}$$

$$\implies \frac{M_x(t+h) - M_x(t)}{h} = (\lambda r - \mu)M_x(t) + \frac{o(h)}{h}$$

Tomando límite cuando $h \rightarrow 0$, obtenemos

$$M'_x(t) = (\lambda r - \mu)M_x(t)$$

$$\implies M_x(t) = K e^{(\lambda r - \mu)t}$$

Imponiendo $M_x(0) = i$, concluimos

$$M_x(t) = i e^{(\lambda r - \mu)t}$$

Por otro lado, $\{Y(t) : t \geq 0\}$ no es Cadena de Markov, pero podemos hacer un cálculo similar al anterior utilizando $M_y(t) = E[Y(t)|X(0), Y(0)]$. Análogamente

$$Y(t+h) = \begin{cases} Y(t) + 1 & (\theta + \lambda(1-r)X(t))h + o(h) \\ Y(t) - 1 & \nu Y(t)h + o(h) \\ Y(t) & 1 - (\theta + \lambda(1-r)X(t) + \nu Y(t))h + o(h) \end{cases}$$

Luego, tomando esperanza dos veces tenemos

$$E[Y(t+h)|X(t), Y(t)] = Y(t) + (\theta + \lambda(1-r)X(t) - \nu Y(t))h + o(h)$$

$$\implies M_y(t+h) = M_y(t) + (\theta + \lambda(1-r)M_x(t) - \nu M_y(t))h + o(h)$$

$$\implies \frac{M_y(t+h) - M_y(t)}{h} = \theta + \lambda(1-r)M_x(t) - \nu M_y(t) + \frac{o(h)}{h}$$

Tomando límite cuando $h \rightarrow 0$, obtenemos

$$M'_y(t) = \theta + \lambda(1-r)M_x(t) - \nu M_y(t)$$

$$\implies M'_y(t) = \theta + \lambda(1-r)i e^{(\lambda r - \mu)t} - \nu M_y(t)$$

Resolviendo con la condición $Y(0) = j$, obtenemos

$$M_y(t) = \frac{\theta}{\nu} + \frac{\lambda(1-r)i e^{(\lambda r - \mu)t}}{\lambda r + \nu - \mu} + \left(j - \frac{\lambda(1-r)i}{\lambda r + \nu - \mu} - \frac{\theta}{\nu} \right) e^{-\nu t}$$

P3 Al aeropuerto de **Oregon** llegan aviones de sólo dos líneas aéreas, que realizan una ruta local de alto tráfico: **L.A. Airlines** y **Armijo United**. Los aviones de **L.A. Airlines** demoran exactamente τ_L horas en cubrir la ruta, mientras que los de **Armijo United** lo hacen en τ_A horas, con $\tau_A > \tau_L$. Además se sabe que el tiempo entre arribos de los aviones al aeropuerto de **Oregon**, son variables aleatorias i.i.d. exponenciales de parámetro μ_L y μ_A , respectivamente. Por otro lado la capacidad de todos los aviones de ambas compañías es de R pasajeros.

Los pasajeros que requieren realizar el viaje por esta ruta local, llegan al aeropuerto según un Proceso de Poisson de tasa λ [pasajeros/hora] y se ubican en una cola única con acceso directo a la loza del aeropuerto. Cada vez que llega un avión, cada uno de pasajeros en la fila de espera deciden si abordará o no dicho avión.

Se sabe que si el avión es de **L.A. Airlines** todos los pasajeros esperando tendrán intenciones de abordarlo. Por otro lado, si es de **Armijo United** cada uno de los pasajeros de manera independiente tendrá intenciones de tomar el vuelo con probabilidad p , o decidirá esperar a un próximo avión con probabilidad $1 - p$.

Los pasajeros que desean viajar en un vuelo determinado subirán al avión respetando el orden de llegada y la capacidad de la aeronave. Por otra parte, los pasajeros que deciden no tomar el vuelo y los que se quedaron abajo por falta de capacidad conservarán su prioridad en la fila remanente.

Finalmente suponga que tanto el tiempo que demoran los pasajeros en abordar un avión, como el tiempo de despegue son despreciables y que la sala de espera del aeropuerto cuenta con un espacio MUY grande.

- a) (4.0 pts.) Modele la cantidad de personas en el terminal aéreo como una cadena de Markov en tiempo continuo. Determine las transiciones posibles, las tasas involucradas, indique la condición de existencia de probabilidades estacionarias y plantee el sistema de ecuaciones que permite calcularlas.

Suponga ahora que los pasajeros tomen la decisión de abordar o no un vuelo de manera racional, es decir, que tomen dicha decisión en función del tiempo esperado de viaje.

- a) (0.5 pts.) Explique el trade-off que enfrenta un pasajero en el i -ésimo lugar de la fila al decidir si desea o no abordar un avión de Armijo United.
- b) (1.5 pts.) En términos de los parámetros del problema, encuentre la estrategia óptima de decisión para el pasajero que se encuentra en el i -ésimo lugar de la fila de espera.

Para simplificar la notación, definimos $\alpha_{k,n}$ a la probabilidad de que si llega un avión de Armijo United y hay n personas en el aeropuerto k de ellas quieran abordarlo. Dado que si llega un avión de Armijo United cada uno de los pasajeros de manera independiente tendrá intenciones de tomar el vuelo con probabilidad p , o decidirá esperar a un próximo avión con probabilidad $(1 - p)$, se tiene que:

$$\alpha_{k,n} = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \quad \forall 0 \leq k \leq n$$

Además es útil definir $\alpha_{k,n}^+$ como sigue:

$$\alpha_{k,n}^+ = \sum_{m=k}^n \binom{n}{m} p^m (1-p)^{n-m} \quad \forall 0 \leq k \leq n$$

- a) A contrinucaión se modela la situación descrita utilizando la notación recién definida.
- Para modelar la cantidad de personas en el terminal aéreo como una cadena de Markov en tiempo continuo, basta con determinar las tasas de transición para los siguientes 3 casos:
Caso 1: $i = 0$

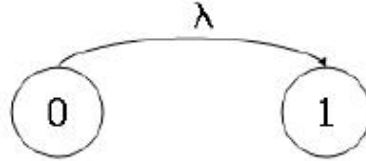


Figura 1: Caso 1

Caso 2: $i \leq R$, $0 \leq j \leq i$.

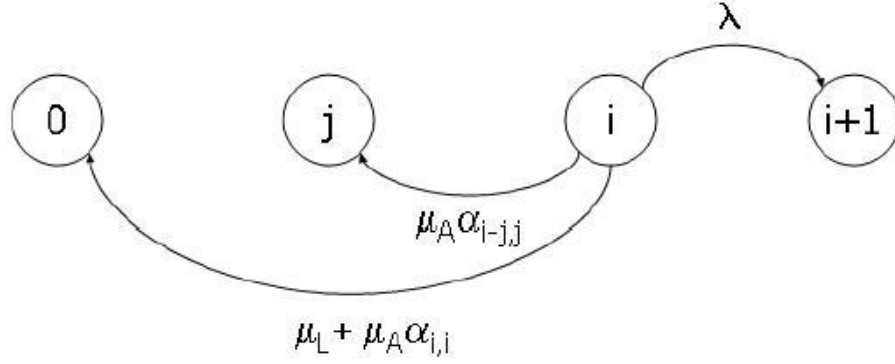


Figura 2: Caso 2

Caso 3: $i > R$, $i - R < j \leq i$.

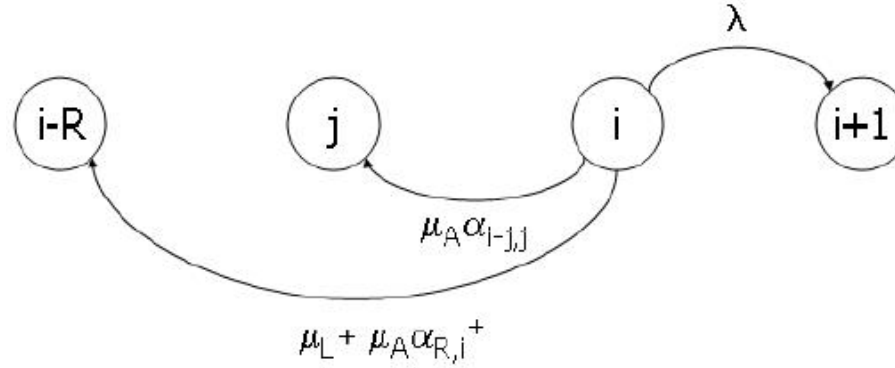


Figura 3: Caso 3

- Para determinar la condición de régimen estacionario debemos fijarnos en un estado genérico $i > R$. Para un estado de este tipo se tienen las siguientes tasas de muerte:
 - Si llega un avión de L.A Airlines lo abordarán con toda seguridad los primeros R pasajeros de la fila de espera.
 - Si llega un avión de Armijo United y más de R personas quieren abordarlo (con probabilidad $\alpha_{R,i}^+$), sólo R de ellos podrán hacerlo.
 - Si llega un avión de Armijo United, $(i - j)$ pasajeros abordarán el vuelo con probabilidad $\alpha_{i-j,i}$ para $i - R + 1 \leq j \leq i - 1$.

Por otro lado cuando llega un nuevo pasajero al terminal aéreo la cantidad de personas en la fila aumenta en uno.

Luego la condición de régimen estacionario es que $\exists i^*$ tal que $\forall i > i^*$ se cumpla que:

$$\lambda \leq \frac{\mu_L + \mu_A \alpha_{R,i}^+}{R} + \sum_{j=i-R+1}^{i-1} \frac{\mu_A \alpha_{i-j,i}}{(i-j)}$$

- El sistema de ecuaciones que permite calcular las probabilidades estacionarias se define en función de los 3 casos detallados anteriormente:

Caso 1: $i = 0$

$$\Pi_0 \lambda = \sum_{i=1}^R \Pi_i (\mu_A \alpha_{i,i} + \mu_L)$$

Caso 2: $i \leq R, 0 \leq j \leq i$.

$$\Pi_i (\lambda + \mu_L + \mu_A \alpha_{i,i} + \sum_{k=1}^{i-1} \mu_A \alpha_{i-k,i}) = \Pi_{i-1} \lambda + \Pi_{i+R} (\mu_L + \mu_A \alpha_{R,i+R}^+) + \sum_{k=i+1}^{R+1-i} \Pi_k \mu_A \alpha_{k-i,i}$$

Caso 3: $i > R, i - R < j \leq i$.

$$\Pi_i (\lambda + \mu_L + \mu_A \alpha_{R,i}^+ + \sum_{k=i-R+1}^{i-1} \mu_A \alpha_{i-k,i}) = \Pi_{i-1} \lambda + \Pi_{i+R} (\mu_L + \mu_A \alpha_{R,i+R}^+) + \sum_{k=i+1}^{R+1-i} \Pi_k \mu_A \alpha_{k-i,i}$$

A este sistema sólo resta la clásica ecuación: $\sum_{i=0}^{\infty} \Pi_i = 1$.

- b) Para un pasajero que está en el lugar i -ésimo con $i \leq R$, el trade-off consiste en subirse al avión de Armijo United que es más lento o esperar el próximo avión de L.A. Airlines, pero que es más rápido pero puede tardar en llegar. Por otro lado, para un pasajero en el lugar i -ésimo con $i > R$ el trade-off es similar pero en lugar de esperar el próximo avión de L.A Airlines debe esperar $k + 1$ aviones de esta aerolínea con $k = \lfloor \frac{i}{R} \rfloor$.
- c) Para $i \leq R$, la política óptima es tomar el avión de Armijo United si:

$$\tau_A < \frac{1}{\mu_L} + \tau_L$$

y esperar el avión de L.A. Airlines en caso contrario.

Para $i > R$, la política óptima es tomar el avión de Armijo United si:

$$\tau_A < \frac{1}{\mu_L} (k + 1) + \tau_L \quad \text{donde } k = \lfloor \frac{i}{R} \rfloor$$

y esperar el avión de L.A. Airlines en caso contrario.

Gustavo Angulo
gangulo@dim.uchile.cl

Diego Morán
dmoran@dim.uchile.cl