

Clase Auxiliar 8

8 DE OCTUBRE DE 2008

P1 La impresión de documentos foliados se suele llevar a cabo en dos fases: primero una de impresión fija en que se imprime el contenido fijo de los documentos y una de impresión variable en que se imprime el folio. Considere entonces un taller de impresión que cuenta con dos impresoras, una para cada tarea.

El tiempo que demora la impresora de contenido fijo en imprimir una hoja es una v.a. exponencial de media $1/\lambda[\text{min}]$ y el tiempo que funciona continuamente sin fallar es una v.a. exponencial de media $1/\alpha[\text{min}]$.

Por su parte, el tiempo que demora la impresora de contenido variable en completar la impresión de una hoja es una v.a. exponencial de media $1/\mu[\text{min}]$ y el tiempo que funciona continuamente sin fallar es una v.a. exponencial de media $1/\gamma[\text{min}]$.

Cuando una máquina falla, independiente de cuál se trate, es enviada inmediatamente a reparaciones y vuelve a estar funcionando en un tiempo exponencialmente distribuido de media $1/\delta[\text{min}]$. Considere que se cuenta con dos reparadores, por lo tanto, cada vez que una máquina falla, comienza inmediatamente su reparación.

Supondremos que en el área fija SIEMPRE hay hojas por imprimir (la carga de trabajo es continua y cargar una hoja “siempre” demora menos que imprimir una). En tanto, la impresora de contenido variable recibe como *input* las hojas que han salido de la impresora fija.

Cada impresora sólo puede imprimir una hoja a la vez.

- a) (0.7 pts.) Definimos el conjunto $E = \{B, M\}$ que contiene los estados posibles en que se puede hallar cada máquina, siendo $B = Buena$ y $M = Mala$. Si EF y EV denotan al estado de la impresora fija y la impresora variable en el tiempo, respectivamente, ¿Es $\{(EF, EV)_t\}$ una cadena de Markov en tiempo continuo? Si su respuesta es afirmativa, explique claramente por qué, defina sus estados y entregue expresiones para las tasas de transición; si su respuesta es negativa, explique claramente por qué y especifique qué información adicional se requeriría para que sí lo fuera.
- b) (0.7 pts.) Diremos que ocurre un registro cada vez que la impresora de contenido fijo ha completado la impresión de 5 hojas en forma continua, sin fallar. Sea R_t el número de registros acumulados hasta el instante t . ¿Es $\{(EF, R)_t\}$ una cadena de Markov en tiempo continuo? Si su respuesta es afirmativa, explique claramente por qué, defina sus estados y entregue expresiones para las tasas de transición; si su respuesta es negativa, explique claramente por qué y especifique qué información adicional se requeriría para que sí lo fuera.
- c) (0.7 pts.) Sea NF_t el número acumulado de veces que la impresora de contenido fijo ha fallado hasta el instante t . ¿Es $\{(EF, NF)_t\}$ una cadena de Markov en tiempo continuo? Si su respuesta es afirmativa, explique claramente por qué, defina sus estados y entregue expresiones para las tasas de transición; si su respuesta es negativa, explique claramente por qué y especifique qué información adicional se requeriría para que sí lo fuera.
- d) Sea NH_t el número de hojas que se encuentran en el área de impresión variable en el instante t (incluida la que se está imprimiendo, si es que efectivamente hay hojas en esta área).
 - 1) (1.0 pto.) Modele $\{(EF, EV, NH)_t\}$ como una cadena de Markov en tiempo continuo.
 - 2) (0.5 pts.) ¿Qué condición se debe cumplir para que esta cadena admita régimen estacionario?
 - 3) (1.0 pto.) Asumiendo que se cumple la condición anterior y que las probabilidades estacionarias son conocidas, responda:

- En el largo plazo, ¿Cuál es el número promedio de hojas por unidad de tiempo que terminan el proceso de impresión?
 - En el largo plazo, ¿Cuál es el número promedio de hojas a la espera de ser impresas en el área de impresión variable?
- 4) (1.4 pts.) Suponga que el operario de la impresora de contenido fijo es premiado con un bono inicial si consigue imprimir 15 mil hojas sin fallar. Luego obtiene otro bono por cada 5 mil hojas impresas de forma continua. Después del quinto bono, el operario es promovido a labores superiores y se contrata un nuevo operario para la impresión fija. Por el contrario, si la impresora fija falla en algún momento, el trabajador en curso es despedido y reemplazado por un nuevo operario.
- ¿Cuál es el número esperado de bonos que recibe un operario?
 - ¿Cuál es el número esperado de operarios distintos que operan la máquina de impresión fija en una unidad de tiempo?
 - ¿Cuál es el número esperado de operarios distintos que operan la máquina de impresión fija hasta que alguno es promovido a labores superiores?
- P2 Una casa comercial ha decidido clasificar a sus clientes en 2 tipos: los tipo 1, *que recomiendan la tienda a sus amigos* y los tipo 2, *que no la recomiendan*. El gerente comercial sabe que cada uno de los clientes que recomiendan la tienda traerá un nuevo cliente luego de un tiempo aleatorio exponencialmente distribuido de tasa λ , el cual con probabilidad r será de tipo 1, y con probabilidad $(1 - r)$ será de tipo 2. Además, a esta casa comercial llegan clientes tipo 2 de manera exógena, según un proceso de Poisson de tasa θ .
- Se sabe que un cliente del tipo 1 dejará de ser cliente de la casa comercial luego de un tiempo aleatorio, exponencialmente distribuido de tasa μ . De la misma manera, un cliente tipo 2 dejará de ser cliente luego de un tiempo aleatorio, exponencialmente distribuido de tasa ν .
- a) Modele la base de clientes de la casa comercial como una Cadena de Markov en Tiempo Continuo. Escriba explícitamente las tasas de transición. HINT: No es necesario que dibuje toda la cadena.
 - b) Calcule $E[X_i(t)]$, donde $X_i(t)$ es una variable que indica el número de clientes tipo i que tiene la casa comercial en el tiempo T , $i = 1, 2$. Suponga que el gerente comercial está interesado en el estudio de la base de clientes en el largo plazo. Calcule la esperanza del número de clientes tipo 1 y del número de clientes tipo 2, en función de los parámetros del problema.
- P3 Al aeropuerto de Oregon llegan aviones de sólo dos líneas aéreas, que realizan una ruta local de alto tráfico: L.A. Airlines y Armijo United. Los aviones de L.A. Airlines demoran exactamente τ_L horas en cubrir la ruta, mientras que los de Armijo United lo hacen en τ_A horas, con $\tau_A > \tau_L$. Además se sabe que el tiempo entre arribos de los aviones al aeropuerto de Oregon, son variables aleatorias i.i.d. exponenciales de parámetro μ_L y μ_A , respectivamente. Por otro lado la capacidad de todos los aviones de ambas compañías es de R pasajeros.
- Los pasajeros que requieren realizar el viaje por esta ruta local, llegan al aeropuerto según un Proceso de Poisson de tasa λ [pasajeros/hora] y se ubican en una cola única con acceso directo a la loza del aeropuerto. Cada vez que llega un avión, cada uno de pasajeros en la fila de espera deciden si abordará o no dicho avión. Se sabe que si el avión es de L.A. Airlines todos los pasajeros esperando tendrán intenciones de abordarlo. Por otro lado, si es de Armijo United cada uno de los pasajeros de manera independiente tendrá intenciones de tomar el vuelo con probabilidad p , o decidirá esperar a un próximo avión con probabilidad $1 - p$.
- Los pasajeros que desean viajar en un vuelo determinado subirán al avión respetando el orden de llegada y la capacidad de la aeronave. Por otra parte, los pasajeros que deciden no tomar el vuelo y los que se quedaron abajo por falta de capacidad conservarán su prioridad en la fila remanente.
- Finalmente suponga que tanto el tiempo que demoran los pasajeros en abordar un avión, como el tiempo de despegue son despreciables y que la sala de espera del aeropuerto cuenta con un espacio MUY grande.
- a) (4.0 pto.) Modele la cantidad de personas en el terminal aéreo como una cadena de Markov en tiempo continuo. Determine las transiciones posibles, las tasas involucradas, indique la condición de existencia de probabilidades estacionarias y plantee el sistema de ecuaciones que permite calcularlas.

Suponga ahora que los pasajeros tomen la decisión de abordar o no un vuelo de manera racional, es decir, que tomen dicha decisión en función del tiempo esperado de viaje.

- a)* (0.5 pts) Explique el trade-off que enfrenta un pasajero en el i -ésimo lugar de la fila al decidir si desea o no abordar un avión de Armijo United.
- b)* (1.5 pts.) En términos de los parámetros del problema, encuentre la estrategia óptima de decisión para el pasajero que se encuentra en el i -ésimo lugar de la fila de espera.

Gustavo Angulo
gangulo@dim.uchile.cl

Diego Morán
dmoran@dim.uchile.cl