FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICAS Y MATEMÁTICAS UNIVERSIDAD DE CHILE

IN79O: Modelos Estocásticos en Sistemas de Ingeniería
Profesor : Raúl Gouet
Auxiliares : Gustavo Angulo, Diego Morán

Clase Auxiliar 3

20 de Agosto de 2008

P1 Una matriz de transiciones se dice doblemente estocástica si

$$\sum_i P_{ij} = 1 \quad \forall\, j.$$

Esto es, todas las columnas suman 1. Muestre que una cadena ergódica de N estados, con matriz de transición doblemente estocástica, tiene la siguiente ley estacionaria:

$$\pi_i = \frac{1}{N} \quad \forall\, i$$

Sol: La cadena es ergódica por lo que existirá una única ley de probabilidades estacionarias. Supongamos que esta ley es:

$$\pi_i = \frac{1}{N} \quad \forall\, i$$

Se debe verificar que se cumple:

- $\pi = \pi \cdot P$
- $\sum_i \pi_i = 1$

Una vez hecho lo anterior, que no es difcil, usando que la ley es única concluimos, pues debe haber un nico vector π cumpliendo lo anterior y que en este caso es justo $\pi_i = \frac{1}{N}$.

P2 En el problema de la ruina del jugador, para $p = \frac{1}{2}$, calcule el número esperado de apuestas hasta que concluye el juego, partiendo desde una fortuna inicial i.

Sol: Existen varias formas de abordar el problema. Se expone una a continuación.

A la cadena original del juego de la ruina agregamos un estado *Inicio* tal que con probabilidad 1 desde este estado se pase al estado i y que desde los nodos terminales 0 y N con probabilidad 1 se pase a *Inicio*.

Como observación,se puede ver que todos los estados de la nueva cadena conforman una única clase recurrente y positiva ¿Por qué?.

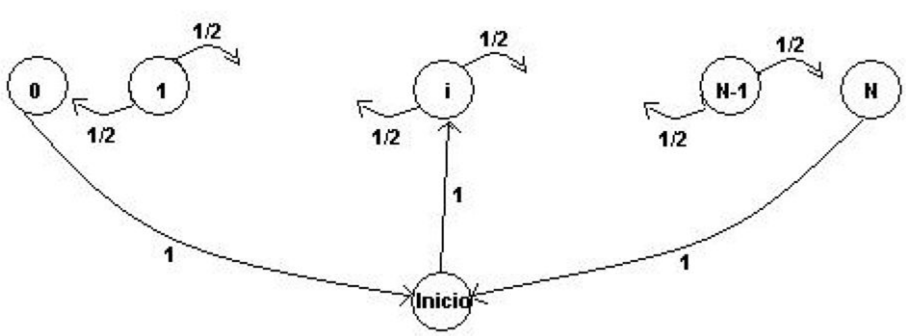

Figura 1: grafo asociado a la P2

Sea m_i el número esperado de períodos que la cadena pasa en el estado i antes de retornar a $Inicio$.

$$\begin{aligned} m_i &= \sum_k E(\text{N de visitas a } i/\text{de } k \text{ se pasa directamente a } i) \cdot P(\text{de } k \text{ se pasa directamente a } i) \\ &= \sum_k m_k \cdot P_{ki} \end{aligned}$$

Notar que $P(\text{de } k \text{ se pasa directamente a } i) = P_{k1}$ pues es una cadena es de markov. En el caso general esta probabilidad podra depender lo que pasó "antes de estar en k".

De la expresión anterior, podemos plantear el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{aligned} m_0 &= \frac{1}{2}m_1 \\ m_1 &= \frac{1}{2}m_2 \\ m_2 &= \frac{1}{2}m_1 + \frac{1}{2}m_3 \\ &\vdots \\ m_i &= 1 + \frac{1}{2}m_{i-1} + \frac{1}{2}m_{i+1} \\ &\vdots \\ m_{N-2} &= \frac{1}{2}m_{N-3} + \frac{1}{2}m_{N-1} \\ m_{N-1} &= \frac{1}{2}m_{N-2} \\ m_N &= \frac{1}{2}m_{N-1} \end{aligned}$$

Con un poco de desarrollo, se puede llegar a que:

$$m_j = 2jm_0 \qquad \forall 1 \leq j \leq i$$
$$m_j = 2(N-j)m_N \qquad \forall i \leq j \leq N-1$$

Pero además, notar que $m_0 + m_N = 1$, pues se pasa exactamente 1 vez por alguno de los estados 0 ó N una vez que se sale de $Inicio$ y se regresa a $Inicio$. De esta ecuación y de las dos anteriores evaluadas para $j = i$, se concluye que:

$$m_0 = \frac{N-i}{N}$$
$$m_N = \frac{i}{N}$$

Por último, calculamos el resultado que buscamos:

$$E(Apuestas) = \sum_{j=1}^{N-1} m_j = \sum_{j=1}^{i} 2jm_0 + \sum_{j=i+1}^{N-1} 2(N-j)m_N = 2m_0\frac{i(i+1)}{2} + 2m_N\frac{(N-i-1)(N-i)}{2} = i(N-i)$$

Observaciones:

- Se puede obtener el mismo resultado modelando la ruina del jugador de la forma "usual".
- Note que necesita calcular m_0, m_N para llegar a la solución.
- Se puede encontrar otro sistema de ecuaciones que permita calcular los m_i, pero condicionando en el resultado de la primera apuesta.
- También se pueden calcular los m_i usando wald.
- Estudie el Ross en las vecindades de la página 188 para más información.

P3 El rey Armijo acaba de recibir una elegante mesa redonda que cuenta con m sillas normales y un Trono, todas dispuestas a su alrededor. El rey Armijo realizará un exhaustivo control de calidad a cada uno de las sillas incluido su trono. Para esto, partiendo de su trono probará uno a uno los asientos de acuerdo a la siguiente lógica. Tras probar por un minuto un asiento, se desplazará rápidamente a uno de los asientos contiguos. Con probabilidad p se desplazará a la derecha y con probabilidad $1-p$ a la izquierda, independiente de si ya ha pasado por el asiento de destino. Como ya se debe imaginar Armijo tiene una pésima memoria por lo que es capaz de estar realizando su control de calidad por mucho tiempo. Los caballeros de la mesa, que se encuentran observando semejante espectáculo han organizado una serie de apuestas. El caballero i, que se sienta en el i-ésimo lugar a la derecha del trono ha apostado R_i monedas de oro a que su asiento es el último en ser visitado por primera vez.

a) (0.5 ptos.)Modele el errático comportamiento del rey como una cadena de markov en tiempo discreto.

b) (1.5 ptos.)Calcule la ganancia esperada del caballero i.

c) (1.5 ptos.) Calcule la esperanza del tiempo que transcurre hasta que alguno de los caballeros gana la apuesta.

Una vez que acaba esta apuesta los caballeros de inmediato formulan otra, considerando el mismo monto (es decir el i-ésimo caballero apuesta R_i monedas de oro).Esta nueva apuesta consiste en lo siguiente: dejarán al rey en su comportamiento errático hasta que la reina lo descubra. Si la reina descubre al rey en el asiento del caballero i este será proclamado ganador.

d) (1.5 ptos.) Considerando que la reina no descubrirá al rey sino hasta pasado mucho tiempo, calcule la ganancia esperada del caballero i.

Sol: *a*) La cadena es la siguiente:

- El conjunto de los números de la sillas que se encuentra inspeccionando el rey. Las sillas numeradas en forma ascendente hacia la derecha del rey. El 0 representa al trono.

$$estados = \{0, \ldots, m\}$$

- Las probabilidades de transición son las siguientes:

$$p_{ij} = \begin{cases} p & j = i+1, \quad i \neq m \\ 1-p & j = i-1, \quad i \neq 0 \\ p & j = 0, \quad i = m \\ 1-p & j = m, \quad i = 0 \end{cases}$$

b) Para calcular la probabilidad que gane el caballero i condicionaremos sobre cual de los estados adyacentes a i es visitado primero.

$$P[\text{Gana } i] = P[\text{Gana } i \mid i+1 \text{ primero}] \cdot P[i+1 \text{ primero}] + P[\text{Gana } i \mid i-1 \text{ primero}] \cdot P[i-1 \text{ primero}]$$

- Para calcular la probabilidades de "*visitar a* $i-1$ *primero*, *visitar a* $i+1$ *primero*" utilizaremos los resultados de la ruina del jugador. Para esto se "elimina" la silla del caballero i-ésimo y se considera como estados de riqueza al resto de las sillas. La analogía se muestra en la Figura 2.

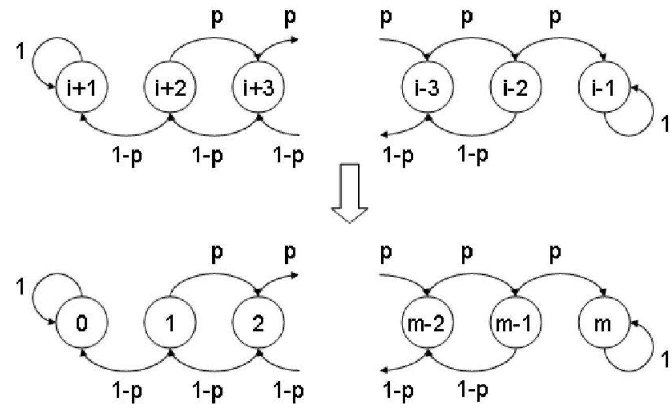

Figura 2: Analogía cálculo de “visita primero”

Dado que tenemos m estados y que partimos del trono (estado 0 en la cadena original, estado $m-i$ en la cadena de la ruina) tendremos que:

$$P[i-1 \text{ primero}] = \frac{1-\rho^{(m-i)}}{1-\rho^{m-1}}$$

Donde $\rho = \frac{1-p}{p}$. Entonces:

$$P[i+1 \text{ primero}] = 1 - \frac{1-\rho^{(m-i)}}{1-\rho^{m-1}}$$

- Para calcular la probabilidad que “*i gane, dado que visito primero* $i-1$” realizamos la analogía a la ruina del jugador que se muestra en la figura 2.

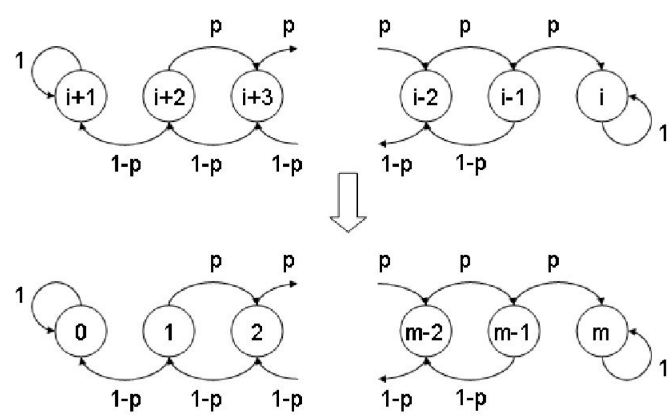

Figura 3: Analogía “primero $i-1$”

Para ganar debemos partir desde $i-1$ y llegar a $i+1$, pues con esto me aseguro visitar todas las sillas antes de visitar i por primera vez. En nuestra cadena modificada, esto es partir del estado $m-1$ y llegar al estado 0. Utilizando los resultados conocidos pra la ruina del jugador:

$$P[\text{Ganar } | i-1 \text{ primero}] = 1 - \frac{1-\rho^{(m-1)}}{1-\rho^{m}}$$

- Razonando de la misma forma, vemos que para calcular la probabilidad de "*ganar dado que llegamos primero a* $i+1$" podemos realizar la analogía que se muestra en la figura 3:

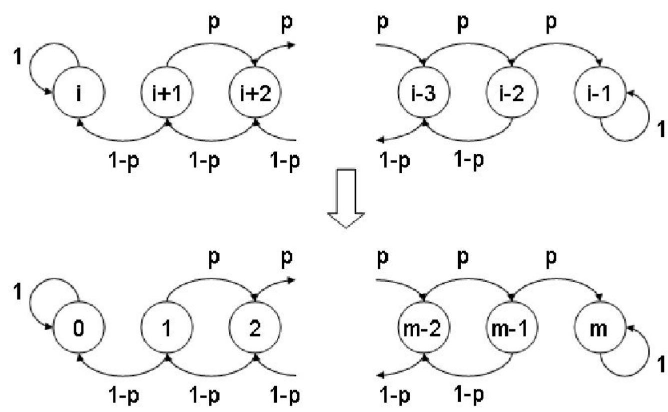

Figura 4: Analogía "primero $i+1$"

La probabilidad buscada es la de partiendo en el estado 1 llegar al estado m. Esto es:

$$P[\text{Ganar } |i+1 \text{ primero}] = \frac{1-\rho}{1-\rho^m}$$

Finalmente, se junta todo lo anterior para obtener una expresión para $P[\text{Gana } i]$.

La esperanza de las ganancias del caballero i es:

$$E[U_i] = P[\text{gana } i] \cdot \left[\sum_{j=1, j\neq i}^{m} R_j\right] - P[\text{pierde } i] R_i$$

c) De la parte anterior conocemos la probabilidad de victoria de cada jugador. Sea T el número de periodos transcurridos hasta que algún caballero gana[1], y considere variables X_j representando ensayos de una distribución *Bernoulli*$(1,-1)$ de parámetro p.
Queremos calcular

$$E[T] = \frac{E\left[\sum_{j=1}^{T} X_j\right]}{E[X_i]}$$

Dado que T tiene esperanza finita (no es necesario demostrarlo) podemos ocupar el teorema de Wald:

$$E\left[\sum_{j=1}^{T} X_j\right] \quad = \quad E[T] \cdot (2p-1)$$

También podemos escribir la expresión de la izquierda condicionando sobre el ganador de la apuesta:

$$E\left[\sum_{j=1}^{T} X_j\right] \quad = \quad \sum_{i=1}^{m} E\left[\sum_{j=1}^{T} X_j |\text{gana } i\right] \cdot P[\text{gana } i]$$

[1]Se considerará que un caballero gana en el instante en que se visitan las $m-1$ sillas del resto de los caballeros

Pero, condicionando como en la parte *a)*:

$$E\left[\sum_{j=1}^{T} X_j|\text{gana } i\right] \quad = \quad -(m-i)\cdot\left[\frac{1-\rho^{(m-i)}}{1-\rho^{m-1}}\right]+(i-1)\cdot\left[1-\frac{1-\rho^{(m-i)}}{1-\rho^{m-1}}\right]$$

Finalmente:

$$E[T] \quad = \quad \sum_{i=1}^{m}\frac{1}{2p-1}\cdot\left(-(m-i)\cdot\left[\frac{1-\rho^{(m-i)}}{1-\rho^{m-1}}\right]+(i-1)\cdot\left[1-\frac{1-\rho^{(m-i)}}{1-\rho^{m-1}}\right]\right)\cdot P[\text{gana } i]$$

d) Dado que la matriz de la cadena es doblemente estocástica y ergódica[2] no necesitamos calcular las probabilidades estacionarias (ver `P1`).
Dado que la reina llega en mucho, mucho tiempo, supondremos estado estacionario. De esta forma la esperanza de las ganancias del caballero i es:

$$E[U_i]=\left[\frac{1}{m+1}\cdot\sum_{j=1}^{m}R_j\right]-R_i$$

Notamos que en este caso pudiese no haber un ganador.

`P4` Suponga que dos secuencias independientes $X_1, X_2, \ldots$ y $Y_1, Y_2, \ldots$ provienen de un laboratorio y que representan ensayos de Bernoulli con probabilidades de éxito desconocidas P_1 y P_2, donde $P[X_i=1]=1-P[X_i=0]=P_1$ y $P[Y_i=1]=1-P[Y_i=0]=P_2$, siendo todas las variables aleatorias independientes. Para decidir si $P_1>P_2$ o $P_2>P_1$, realizaremos la siguiente prueba: Consideremos un entero positivo M y una parada N igual al primer entero n tal que se cumple

$$X_1+\ldots+X_n-(Y_1+\ldots+Y_n)=M$$

o

$$X_1+\ldots+X_n-(Y_1+\ldots+Y_n)=-M$$

En el primer caso diremos que $P_1>P_2$, y en el segundo que $P_2>P_1$. Muestre que, cuando $P_1\geq P_2$, la probabilidad de cometer un error (es decir, afirmar que $P_2>P_1$) es

$$P[Error]=\frac{1}{1+\lambda^M}$$

y que el numero esperado de ensayos observados es

$$E[N]=\frac{M(\lambda^M-1)}{(P_1-P_2)(\lambda^M+1)}$$

donde

$$\lambda=\frac{P_1(1-P_2)}{P_2(1-P_1)}$$

HINT: Asocie al problema de la ruina del jugador.

[2]al menos esa es la idea intuitiva...lo más complicado es verificar que es recurrente positiva, no estoy seguro de ese hecho. Lo dejamos propuesto xD

`Sol:` Partiendo desde 0 debemos observar la evolución de la cadena de Markov dada por los estados $Z_n = X_1 + \ldots + X_n - (Y_1 + \ldots + Y_n)$. Esta cadena es muy similar a la del problema de la ruina del jugador, salvo que podremos contar con periodos en los cuales la cadena no cambia de estado. Dado que no nos interesa (a priori) calcular el número esperado de transiciones hasta cometer el error o acertar, lo que haremos será modificar nuestra cadena de forma de no contabilizar los períodos en los cuales Z_n no cambia de valor. De esta forma estamos frente al problema de la ruina del jugador donde la probabilidad de avanzar (o ganar una de las apuestas) es

$$p = \mathrm{P}(\text{aumenta/aumenta o disminuye estrictamente}) = \frac{p_1(1-p_2)}{p_1(1-p_2) + p_2(1-p_1)}$$

Consideraremos $p_1 \neq p_2$. Cuando $p_1 = p_2$ el resultado es obvio.

Contamos con $N = 2M$ estados y partimos con una fortuna inicial de M unidades. Los resultados del problema de la ruina del jugador nos dicen la probabilidad de lograr alcanzar la fortuna de N unidades y no perder todo, cuando la fortuna inicial es i, tiene la siguiente forma:

$$f_i = \frac{1 - (\frac{1-p}{p})^i}{1 - (\frac{1-p}{p})^N}$$

Notando que el error corresponde a perder toda la fortuna, es decir, "$Z_n = -M$", vemos que:

$$\begin{aligned}
P[error] &= 1 - \frac{1 - (\frac{1}{\lambda})^M}{1 - (\frac{1}{\lambda})^{2M}} \\
&= 1 - \frac{\lambda^{2M} - \lambda^M}{\lambda^{2M} - 1} \\
&= \frac{\lambda^M - 1}{\lambda^{2M} - 1} \\
&= \frac{1}{\lambda^M + 1}
\end{aligned}$$

donde

$$\lambda = \frac{P_1(1-P_2)}{P_2(1-P_1)}$$

Para encontrar N, el número esperado de ensayos observados, condicionamos sobre el resultado final y utilizamos el teorema de Wald (es fácil demostrar que $E[N] < \infty$).

$$\begin{aligned}
E\left[\sum_{i=1}^{N}(X_i - Y_i)\right] &= M \cdot \frac{\lambda^M}{\lambda^M + 1} - M \cdot \frac{1}{\lambda^M + 1} \\
E[N]\left(E[X_i] - E[Y_i]\right) &= M \cdot \frac{\lambda^M - 1}{\lambda^M + 1} \\
E[N](p_1 - p_2) &= M \cdot \frac{\lambda^M - 1}{\lambda^M + 1}
\end{aligned}$$

Despejando tenemos que:

$$E[N] = M \cdot \frac{(\lambda^M - 1)}{(p_1 - p_2)(\lambda^M + 1)}$$

P5 Un organismo unicelular tiene un ciclo de vida que permite distinguir 2 posible estados: Inmaduro (I) o desarrollado (D). Un individuo inmaduro permanece en ese estado un tiempo exponencialmente distribuido, con media $1/a$ [minutos]. Un individuo desarrollado permanece en ese estado un tiempo exponencialmente distribuido con media $1/b$ [minutos], al cabo del cual se divide en 2, dando origen a 2 individuos inmaduros.

a) Formule un modelo de Markov en tiempo continuo que permita describir la evolución de una población de estos organismos, la cual comienza en $t = 0$ con un individuo inmaduro, ¿Qué estados definiría?. ¿Cuáles son las tasas de transición entre ellos?.

b) Suponga que el tiempo transcurre hacia el infinito. ¿Cuál es el número de individuos que esperaría que hubiesen?.

Sol: *a*) Primero debemos notar que la cadena es infinita, por lo tanto para tener una representación gráfica debemos generalizar. Si modelamos como estado el número de individuos inmaduros y desarrollados, entonces la cadena es la que se muestra en la figura 5 (para un estado genérico: i inmaduros, j desarrollados).

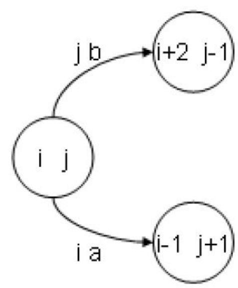

Figura 5: Cadena problema 5

b) Como el número de individuos nunca disminuye y las tasas de transición aumentan con esta evolución, en el largo plazo habrán infinitas personas.

Observación: las tasas $i \cdot a$,$j \cdot b$, se pueden interpretar o explicar mirando las probabilidades de que cada evento "ocurra primero":

$$\frac{i \cdot a}{i \cdot a + j \cdot b} \quad y \quad \frac{j \cdot b}{i \cdot a + j \cdot b}$$

Donde $i \cdot a$ es la tasa de una exponencial que representa el mínimo entre i v.a. exponenciales i.i.d. de parámetro a. La tasa $j \cdot b$ tiene una interpretación similar. Las probabilidades antes mostradas provienen de "echar a competir" a las exponenciales con tasa $i \cdot a$ y$j \cdot b$.

Gustavo Angulo ganguloe@dim.uchile.cl

Diego Morán dmoran@dim.uchile.cl