



FACULTAD DE CIENCIAS
FÍSICAS Y MATEMÁTICAS
UNIVERSIDAD DE CHILE

IN790: Modelos Estocásticos en Sistemas de Ingeniería

Profesor : Raúl Gouet

Auxiliares : Gustavo Angulo, Diego Morán

Tarea 2

01 DE OCTUBRE DE 2008

- P1 Sean $X_1, X_2, \dots$ variables aleatorias independientes tal que $\Pr[X_i = j] = \alpha_j$, con $j \geq 0$. Digamos que ocurre un registro en el instante n si $X_n > \max(X_1, \dots, X_{n-1})$, donde $X_0 = -\infty$, y si ocurre un registro en el instante n , sea X_n el valor de registro. Sea R_i el i -ésimo valor de registro.
- Argumente que $\{R_i, i \geq 1\}$ es una cadena de Markov y calcule sus probabilidades de transición.
 - Sea T_i el tiempo entre el i -ésimo y el $(i+1)$ -ésimo registro. Es $\{T_i, i \geq 1\}$ una cadena de Markov?. Y $\{(R_i, T_i), i \geq 1\}$? Calcule las probabilidades de transición donde corresponda.
 - Sea $S_n = \sum_{i=1}^n T_i, n \geq 1$. Argumente que $\{S_n, n \geq 1\}$ es una cadena de Markov cuando los X_i son continuos y encuentre sus probabilidades de transición.
- P2 Suponga que un sistema queda bien modelado por 2 cadenas de Markov ergódicas A y B , con probabilidades de transición P_{A_i, A_j} y P_{B_i, B_j} respectivamente. El sistema se conecta a través de los estados A_1 y B_1 tal como se ilustra en la figura, de manera que las probabilidades de transición en una etapa de la nueva cadena quedan bien definidas por:

$$P'_{A_1, B_1} = \epsilon, \quad P'_{A_1, A_j} = (1 - \epsilon) \cdot P_{A_1, A_j} \quad \forall A_j$$

$$P'_{B_1, A_1} = \delta, \quad P'_{B_1, B_j} = (1 - \delta) \cdot P_{B_1, B_j} \quad \forall B_j$$

El resto de las probabilidades de transición no sufren modificaciones.

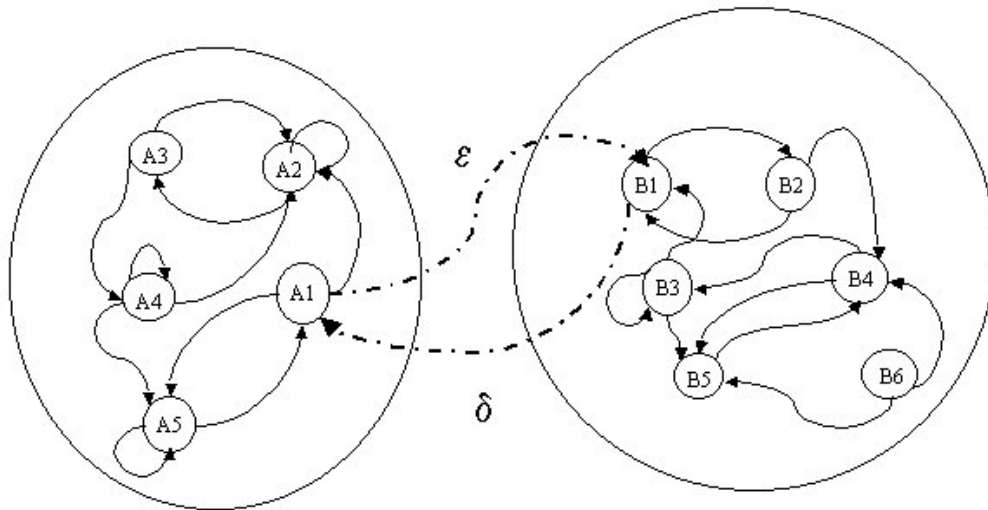


Figura 1: transiciones de las cadenas de Markov de la P2

- a) Suponiendo que $\epsilon > 0$ y $\delta = 0$, conteste las siguientes preguntas:
- 1) Clasifique los estados de la cadena. Justifique la existencia de probabilidades estacionarias.
 - 2) Partiendo del estado A_1 calcule el tiempo esperado de retorno a A_1 condicional a que la primera transición es a algún estado de A .
 - 3) Encuentre el tiempo esperado de llegar por primera vez al estado B_1 partiendo de A_1 (y llámelo μ_{AB}).
- b) Suponiendo que $\epsilon > 0$ y $\delta > 0$, conteste las siguientes preguntas:
- 1) Clasifique los estados de la cadena. Justifique la existencia de probabilidades estacionarias.
 - 2) Encuentre el tiempo esperado μ_{BA} de llegar por primera vez al estado A_1 partiendo de B_1 .
 - 3) Encuentre las probabilidades estacionarias de la cadena combinada. Puede expresar su respuesta en término de los parámetros del problema y de las probabilidades estacionarias de las cadenas originales, π_{A_i} y π_{B_i} .

P3 Armijo Catalán se encuentra en una difícil situación. Camino a su casa es adorado por un conjunto de delincuentes que desean robarle sus preciadas pertenencias. Sin embargo Armijo, un hombre previsor y mentalmente desequilibrado, se encuentra preparado para enfrentar esta situación y sin dudarlo desenfunda su arma automática de colección (Armijo sufre de delirio de persecución).

Debido a la situación las manos de Armijo no responden fielmente a su voluntad y cada vez que trata de disparar sus manos temblorosas dejan salir una ráfaga de 1, 2 o 3 balas con probabilidades p , q , y r , respectivamente ($p + q + r = 1$). Armijo, no tan previsor, cuenta con un único cargador de N balas.

- a) Armijo desearía saber cuál es el número esperado de disparos (ráfagas) que alcanzará a hacer antes de que se le acaben las balas. Modelando el problema como una cadena de Markov explique como obtener la respuesta.

Suponga que Armijo se enfrenta a R enemigos y el único medio de defensa que tiene es el antes descrito, pudiendo disparar contra sólo 1 de los delincuentes con cada ráfaga de la pistola. Se sabe que si Armijo se queda sin balas antes de matar a todos los delincuentes, estos le darán muerte, mientras que saldrá victorioso de la situación si los mata a todos antes de terminar sus N balas. La probabilidad que una ráfaga de i balas impacte al delincuente al que Armijo disparó es de P_i .

- b) Describa la evolución de esta situación utilizando una cadena de Markov en tiempo discreto. Determine las probabilidades de una etapa, clasifique y caracterice los estados. ¿Existirán probabilidades estacionarias?, Explique su respuesta.¹
- c) ¿Cuál es la probabilidad que nuestro mentalmente perturbado héroe muera durante el enfrentamiento con los delincuentes comunes?. Suponga $N = 3$ y $R = 2$.

P4 Considere una población en la cual cada individuo, independiente del resto, da a luz en un tiempo exponencial de tasa λ y muere en un tiempo exponencial de tasa μ . Adicionalmente, nuevos miembros ingresan a la población de acuerdo a un proceso de Poisson de tasa θ . Sea $X(t)$ el tamaño de la población en el instante t .

- a) ¿Qué tipo de proceso es $\{X(t), t \geq 0\}$?
- b) ¿Cuáles son sus parámetros?
- c) Calcule $E[X(t)|X(0) = i]$

¹HINT: No necesita dibujar toda la cadena sino remitirse a los casos interesantes.

- P5 Una empresa de computación funciona con turnos, de manera que siempre hay M empleados trabajando, todos los cuales necesitan tomar café durante su jornada laboral, según tiempos iid exponenciales de tasa λ .

Para satisfacer esta demanda por café, la empresa dispone de una pequeña cafetería, con capacidad C , pero donde pueden tomar café sólo c empleados simultáneamente ($c \leq C \leq M$). El tiempo que demora un empleado en tomar café es una variable aleatoria con una tasa $(i+1) \cdot \mu$ donde i es el número de personas que está dentro de la cafetería *esperando* poder servirse un café (es decir, los empleados se “apuran” si hay gente esperando).

- Modele la situación como una Cadena de Markov en Tiempo Continuo. Escriba explícitamente las tasas de transición, argumente bajo qué condiciones existirán probabilidades estacionarias y escriba el sistema de ecuaciones que permitiría encontrarlas.
- En términos de las probabilidades estacionarias, calcule el tiempo esperado que transcurre desde que a una persona en particular le dan ganas de ir a tomar café hasta que vuelve a su puesto de trabajo.
HINT: Suponga que los traslados son instantáneos y que si una persona no puede entrar a la cafetería vuelve inmediatamente a su oficina.

El jefe de recursos humanos se ha dado cuenta que los empleados que vuelven a su oficina sin haber podido tomar su café producen menos que aquellos que sí satisficieron su necesidad de cafeína. De manera cada trabajador *feliz* produce a una tasa de α_f por unidad de tiempo, mientras que cada trabajador *moles* por no haber podido tomar café produce a una tasa menor de α_m . Durante el tiempo en que los empleados que se encuentran en la cafetería no producen nada.

Interesa poder determinar la capacidad de la cafetería, así como el número de empleados que pueden atenderse simultáneamente, es decir C y c , con el fin de maximizar los ingresos esperados por unidad de tiempo en el largo plazo. Para esto conteste las siguientes preguntas:

- Modele la situación como una Cadena de Markov en Tiempo Continuo. Escriba explícitamente las tasas de transición y argumente bajo qué condiciones existirán probabilidades estacionarias.
HINT: No es necesario que dibuje toda la cadena, puede limitarse a los casos interesantes.
- Si aumentar C y c no tiene ningún costo, y $\alpha_m = 0$ ¿Cuál es el máximo ingreso esperado por unidad de tiempo al que puede aspirar la compañía?. ¿Qué acciones debe realizar para alcanzarlos?. Explique si es válido su razonamiento si $\alpha_m > 0$.
- (0,5 pts) ¿Cómo cambia su respuesta a la parte anterior si $\alpha_m = 0$, pero existe un costo unitario por aumentar C igual a K y un costo unitario por aumentar c de k ?

- P6 Una araña cazando a una mosca se mueve entre los sectores 1 y 2 de acuerdo a una cadena de Markov de matriz de transición A , partiendo en el sector 1. La mosca, que desconoce que está siendo “observada” por la araña se desplaza, partiendo del sector 2, según una cadena de Markov de matriz de transición B . La cacería termina cuando la mosca y la araña coinciden en el mismo sector. Suponga que:

$$A = \begin{bmatrix} 0,7 & 0,3 \\ 0,3 & 0,7 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 0,4 & 0,6 \\ 0,6 & 0,4 \end{bmatrix}$$

- Muestre que el desarrollo de la cacería (excepto por conocer el lugar en que termina) puede ser descrito como una cadena de Markov con un estado absorbente que representa el fin de la cacería y otros 2 estados que representan que la araña y la mosca están en distintos sectores. Obtenga la matriz de transición.
- Encuentre la probabilidad de que en la n -ésima transición tanto la araña como la mosca estén en sus posiciones iniciales.
- ¿Cuál es la duración (número de transiciones) promedio de la cacería?

- P7 Una pequeña peluquería, atendida por sólo un peluquero, tiene espacio para a lo más dos clientes. Los potenciales clientes llegan de acuerdo a un proceso de Poisson de tasa $3[\text{clientes/hora}]$ y los tiempos de servicio son v.a. exponenciales i.i.d. de media $15[\text{minutos}]$.
- ¿Cuál es el número promedio de clientes en la peluquería?
 - ¿Qué proporción de potenciales clientes son atendidos por el peluquero?
 - Si el peluquero pudiera trabajar el doble de rápido ¿Cuántos clientes por hora más podría atender?
- P8 Cada individuo de una población genera un nuevo individuo cada un tiempo distribuido exponencialmente de tasa λ y muere luego de un tiempo exponencial de media μ . Además, debido a inmigración, la población aumenta en un individuo cada un tiempo exponencialmente distribuido de parámetro θ . Sin embargo, la inmigración está permitida sólo si la población está compuesta por menos de N individuos.
- Modele la situación descrita como un proceso de nacimiento y muerte.
 - Si $N = 3$, $\lambda = 1$, $\mu = 0,5$ y $\theta = 1$ determine la proporción del tiempo que está restringida la inmigración.
-

Observaciones:

- *Fecha de Entrega:* Lunes 20 Octubre.
- Entregar preguntas en grupos de hojas separadas y corcheteadas. Cada grupo debe indicar el nombre del alumno.

Gustavo Angulo
gangulo@dim.uchile.cl

Diego Morán
dmoran@dim.uchile.cl