Clase Auxiliar 6

24 de Septiembre de 2008

P1 En un pequeño centro hospitalario se tiene la urgencia de instalar equipos nuevos. Estos equipos son muy costosos y se deben manejar con mucho cuidado por lo que se necesita que el establecimiento esté vacío al momento de la instalación. El problema es que actualmente se tiene M pacientes en el centro (y los equipos no llegarán hasta que no haya nadie).

Cada mañana un doctor evalúa la condición de los pacientes para ver si son dados de alta. Se ha determinado que cada paciente tiene una probabilidad p de estar rehabilitado y salir del centro y una probabilidad $(1-p)$ de seguir internado, independiente de lo que ocurra con los demás pacientes. Nadie puede ingresar al centro hasta después de instalados los equipos.

a) Muestre que el sistema descrito puede ser modelado como una cadena de Markov en tiempo discreto, dibuje el grafo correspondiente, identifique las clases y clasifique sus estados.

b) Si el sistema tiene inicialmente M pacientes, ¿cuál es la probabilidad que algún día tenga $M-1$?, ¿cuál es la probabilidad que algún día se puedan instalar los equipos?. Encuentre estas probabilidades y fundamente adecuadamente sus respuestas.

Ahora suponga que la instalación de los equipos ya se realizó, por lo que pueden llegar pacientes al centro hospitalario. Se sabe que la probabilidad que lleguen k pacientes en un día es q_k, con $k = 0, 1, 2....$ Además el centro sólo cuenta con C camas, por lo que si llega una persona y no hay cama disponible, ésta es derivada a otro centro médico. Considere que una persona que ingresa al centro es internada al menos por una noche (no puede tener el alta sin una evaluación positiva del doctor que pasa revisión en la mañana).

c) Modifique su modelo para esta nueva situación y dibuje el grafo correspondiente, identifique las clases y clasifique los estados.

Sol: *a)* La situación claramente puede ser modelada como una cadena de Markov en tiempo discreto debido a que si me defino los estados como el número de pacientes que quedan en el centro en un día, entonces todas las probabilidades de transición pueden ser determinadas a partir de esta información. De esta forma se tiene que:

- El estado i Será la situación en que quedan i pacientes enfermos en el centro, $\forall i \in \{0, \ldots, M\}$.
- Las probabilidades de transición quedan determinadas por la siguiente formula[1]:

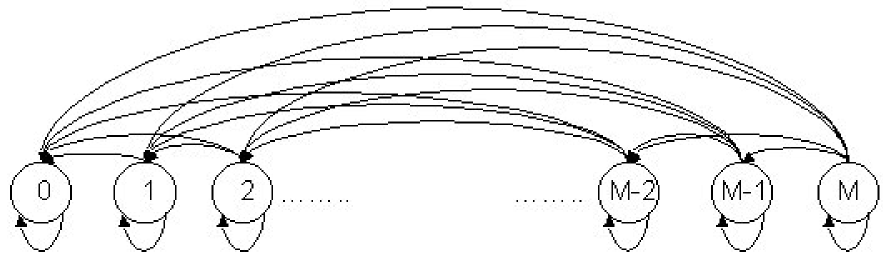
$$P(i,j) = P(\text{ir del estado i al estado j}) = \begin{cases} \frac{i!}{(i-j)!j!} p^{i-j}(1-p)^j & si M \geq i \geq j \geq 0 \\ 0 & si j \geq i \end{cases}$$

- Existen $M+1$ clases distintas: 1 recurrente compuesta por el estado 0, y M clases transientes compuesta cada una por uno de los M estados restantes. Recuerden que una clase esta compuesta por todos los estados comunicados[2] entre sí, y en este caso ningún estado se comunica con otro.

b) Primero necesitamos encontrar la probabilidad de eventualmente pasar por el estado $M-1$. Para calcular esta probabilidad vemos que de pasar por este estado, la transición debe lograrse en algún número de períodos. Por esto se tiene que:

$$P(\text{Pasar por el estado M-1}) = \sum_{i=1}^{\infty} P(\text{Pasar por M-1 en i transiciones})$$

[1] Esto es equivalente a definir la matriz de transición P.
[2] Ver definición en apuntes del curso



Grafo Parte 1

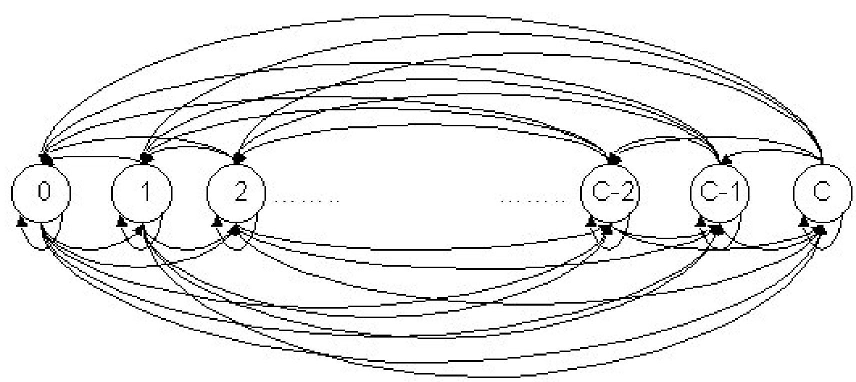
$$P(\text{Pasar por el estado M-1}) = \sum_{i=1}^{\infty} P(\text{Quedarme en M por i-1 transiciones}) \cdot P(M.M-1)$$

$$P(\text{Pasar por el estado M-1}) = \sum_{i=1}^{\infty} (1-p)^{M(i-1)} \cdot M \cdot p \cdot (1-p)^{M-1}$$

$$P(\text{Pasar por el estado M-1}) = \frac{M(1-p)^{M-1}p}{1-(1-p)^M}$$

Por otro lado, la probabilidad de instalar los equipos algún día es equivalente a la probabilidad de llegar alguna vez al estado 0. Sin embargo dado que esta es una cadena ergodica, sé que en el largo plazo con seguridad estare en la clase recurrente. Como en este caso la clase recurrente esta compuesta por el estado 0, es que se puede decir con seguridad (Probabilidad =1)que en el largo plazo el sistema llegará al estado 0 y por lo tanto se podran instalar los equipos.

c) En este caso se tiene un número C de camas disponibles y existe la posibilidad que llegue gente al centro asistencial. De esta forma:



Grafo Parte 3

- El estado i Será la situación en que quedan i pacientes enfermos en el centro, $\forall i \in \{0, \ldots, C\}$.
- Para calcular la probabilidad de transición entre dos estados cualesquiera condicionaremos sobre el número de personas que se recuperan.
  Entonces, para $j \neq C$:

$$P(i,j) = \sum_{k=0}^{i} P(i,j|\text{Se mejoran k personas}) \cdot \frac{i!}{k!(i-k)!} p^k (1-p)^{i-k}$$

- Sin embargo;

P(i, j |Se mejoran k personas) =P(lleguen $j-i+k$ personas)

siempre y cuando $j-i+k \geq 0$, entonces:

$$P(i,j) = \sum_{k=\text{máx}(i-j,0)}^{i} P(\text{lleguen } j-i+k \text{ personas}) \cdot \frac{i!}{k!(i-k)!} p^k (1-p)^{i-k}$$

$$P(i,j) = \sum_{k=\text{máx}(i-j,0)}^{i} q_{j-i+k} \cdot \frac{i!}{k!(i-k)!} p^k (1-p)^{i-k}$$

- De la misma forma, si $j = C$, entonces:

$$P(i,j) = \sum_{k=\text{máx}(i-j,0)}^{i} P(\text{lleguen más de } j-i+k \text{ personas}) \cdot \frac{i!}{k!(i-k)!} p^k (1-p)^{i-k}$$

$$P(i,j) = \sum_{k=\text{máx}(i-j,0)}^{i} \Big(\sum_{z=j-i+k}^{\infty} q_z \Big) \cdot \frac{i!}{k!(i-k)!} p^k (1-p)^{i-k}$$

P2 Considere un jugador que apuesta sucesivas veces en el mismo juego. En cada jugada existe una probabilidad p de ganar una unidad y una probabilidad $1-p$ de perder una unidad. Se asume que las jugadas sucesivas son independientes. El jugador comienza con una cantidad i, $1 < i < N$, y juega hasta que pierde todo o llega a N.

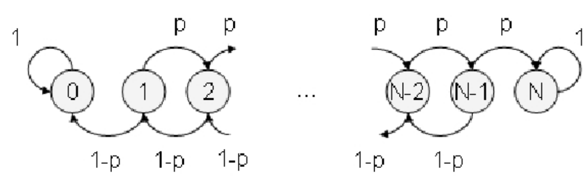
a) Construya una cadena de Markov que describa la fortuna del jugador en cada instante. Incluya las probabilidades de transición.

b) El jugador al llegar a N cambia su estrategia y decide apostar doble o nada, de manera que con probabilidad p su riqueza es $2N$ (y se retira), mientras con probabilidad $1-p$ pierde todo (y su riqueza se reduce a cero). Modele esta nueva situación.

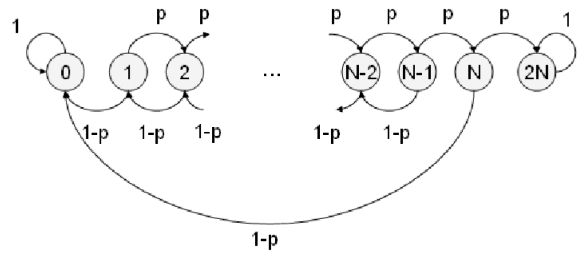
c) Si en la situación de la parte (*a*), la probabilidad de ganar es $p = \frac{1}{2}$, ¿De qué depende que nuestro jugador finalmente gane o pierda?. Sin hacer cálculos entregue valores específicos cuando se pueda e interprete sus resultados.

d) Resuelva el problema para el caso general , es decir, encuentre las probabilidades de terminar ganando o perdiendo el juego si se empieza con una cantidad i, $1 < i < N$. Se juega hasta que pierde todo o llega a N, con $p \neq (1-p)$.

Sol: *a*) La cadena es la siguiente:



b) La cadena es la siguiente:



c) Sea

$$f_i = P[\text{Ganar dado que parto con i unidades}]$$

Inmediatamente vemos que $f_0 = 0$ y que $f_N = 1$. De la misma forma vemos (condicionando en el resultado de la primera apuesta) que:

$$f_i = \frac{1}{2} f_{i+1} + \frac{1}{2} f_{i-1} \qquad \forall 0 < i < N$$

lo que implica que:

$$f_{i+1} - f_i = f_i - f_{i-1} \qquad \forall 0 < i < N$$

La primera ecuación nos dice que:

$$f_2 - f_1 = f_1$$

Utilizando esto vemos que:

$$f_i - f_{i-1} = f_1$$

Ahora si sumamos las $N-1$ primeras ecuaciones tendremos que (utilizando la suma telescópica):

$$f_N - f_1 = (N-1) \cdot f_1 \Rightarrow f_1 = \frac{1}{N}$$

De la misma forma si sumamos las $i-1$ primeras restricciones veremos que:

$$f_i = i \cdot f_1 = \frac{i}{N}$$

d) Para el caso general procederemos exactamente como lo hicimos para el caso particular:

$$f_i = p \cdot f_{i+1} + (1-p) \cdot f_{i-1} \qquad \forall 0 < i < N$$

lo que implica que:

$$f_{i+1} - f_i = \rho(f_i - f_{i-1}) \qquad \forall 0 < i < N$$

Donde $\rho = \frac{1-p}{p}$ La primera ecuación nos dice que:

$$f_2 - f_1 = \rho f_1$$

Utilizando esto vemos que:

$$f_i - f_{i-1} = \rho^{i-1} f_1$$

Ahora si sumamos las $N-1$ primeras ecuaciones tendremos que (utilizando la suma telescópica):

$$f_N - f_1 = (\sum_{i=1}^{N-1} \rho^i) \cdot f_1 \Rightarrow f_1 = \frac{1}{\sum_{i=0}^{N-1} \rho^i} = \frac{1-\rho}{1-\rho^N}$$

De la misma forma si sumamos las $i-1$ primeras restricciones veremos que:

$$f_i = (\sum_{k=0}^{N-1} \rho^k) \cdot f_1 = \frac{1-\rho^i}{1-\rho^N}$$

P3 Considere una cadena de Markov con todos sus estados perteneciendo a una misma clase recurrente positiva que parte en el estado inicial 0. Sea m_i el número esperado de períodos que la cadena pasa en el estado i antes de retornar a 0.

a) Usando la ecuación de Wald, muestre que:

$$m_j = \sum_i m_i P_{ij} \quad j > 0$$

$$m_0 = 1$$

b) Relacionando los m_j con la proporción del tiempo que el sistema pasa en el largo plazo en el estado j para $j > 0$, vuelva a argumentar el resultado anterior.

Sol: *a*) Sea $X_{ij}(n)$ igual a 1 si la n-ésima transición que sale desde i ocurre hacia el estado j y cero en otro caso. Cenotemos por N_i al número de períodos que la cadena pasa en el estado i antes de regresar al estado 0. Luego, para $j > 0$ se tiene:

$$m_j = E[\sum_i \sum_{n=1}^{N_i} X_{ij}(n)] = \sum_i E[\sum_{n=1}^{N_i} X_{ij}(n)]$$

Usando la ecuación de Wald:

$$E[\sum_{n=1}^{N_i} X_{ij}(n)] = E[N_i]P_{ij} = m_i P_{ij}$$

b) Intepretando el tiempo entre visitas a 0 como un ciclo, los π_i correspondientes a la proporción del tiempo que el sistema pasa en el estado j en el largo plazo, satisfacen: $\pi_j = \frac{m_j}{\mu_{00}}$. Luego, de la relación de ecuaciones de estacionariedad $\pi_j = \sum_i \pi_i P_{ij}$ se tiene para $j > 0$ que:

$$m_j = \sum_i m_i P_{ij}$$

P4 Sea $\{X_n : n \geq 1\}$, una cadena de Markov irreductible que tiene un conjunto numerable de estados. Considere ahora un nuevo proceso estocástico $\{Y_n : n \geq 1\}$ que sólo acepta valores de la cadena de Markov que estén entre 0 y N. Esto es, se define Y_n con el n-ésimo valor de la cadena de Markov que está entre 0 y N. Por ejemplo, si $N = 3$ y $X_1 = 1,\ X_2 = 3,\ X_3 = 5,\ X_4 = 6,\ X_5 = 2$ entonces $Y_1 = 1,\ Y_2 = 3,\ Y_3 = 2$.

a) ¿Es $\{Y_n : n \geq 1\}$ una cadena de Markov?. Explique su respuesta.

b) Sea π_i la proporción del tiempo que $\{X_n : n \geq 1\}$ está en el estado i. Si $\pi_i > 0 \quad \forall i$, ¿qué proporción del tiempo está $\{Y_n : n \geq 1\}$ en el estado j?.

c) Suponga que X_n es recurrente nulo y sea $\Pi_i(N)$ la proporción del tiempo que $\{Y_n : n \geq 1\}$ pasa en el estado i, $i = 1, \ldots, N$. Muestre que:

$$\Pi_j(N) = \Pi_i(N) \cdot E[\text{tiempo que el proceso } X \text{ pasa en } j \text{ entre retornos a } i],\ i \neq j$$

d) Use la parte (c) para argumentar que en el paseo aleatorio simétrico el número esperado de visitas a un estado i antes de retornar al origen es 1.

Sol: *a*) Sea $\sigma(n)$ tal que $X_{\sigma(n)}$ representa la enésima vez que la cadena X es menor que N. En el ejemplo del enunciado, $\sigma(1) = 1$, $\sigma(2) = 2$ y $\sigma(3) = 5$. Claramente $\{Y_n : n \geq 1\} = \{X_{\sigma(n)} : n \geq 1\}$. Luego

$$\begin{aligned}
P\left(Y_{n+1} = j | Y_n = i, Y_{n-1} = i_{n-1}, \ldots, Y_1 = i_1\right) &= P\left(X_{\sigma(n+1)} = j | X_{\sigma(n)} = i, X_{\sigma(n-1)} = i_{n-1}, \ldots, X_{\sigma(1)} = i_1\right) \\
&= P\left(X_{\sigma(n+1)} = j | X_{\sigma(n)} = i\right) \\
&= P\left(X_{\sigma(2)} = j | X_{\sigma(1)} = i\right) \\
&= \sum_{m=2}^{\infty} P\left(X_{\sigma(2)} = j, \sigma(2) = m | X_{\sigma(1)} = i\right) \\
&= P_{ij} + \sum_{m=2}^{\infty} P_{iN^+} P_{N^+N^+}^{m-2} P_{N^+j}
\end{aligned}$$

donde $M^+ = \{i : i > N\}$.

b) La proporción del tiempo en el estado j de la nueva cadena será (Notamos que en la nueva cadena el tiempo se detiene cuando realizamos transiciones entre estados de la cadena original no contemplados en la cadena modificada):

$$\Pi_j(N) = \frac{\Pi_j}{\sum_{k=0}^{N} \Pi_k} \qquad \forall\, 0 \geq j \geq N$$

c) Para responder esta parte utilizaremos teoría de renovación. Un ciclo comenzará con una visita al estado i y terminará al comienzo de la próxima visita. Si interpretamos las probabilidades estacionaria de la nueva cadena como la proporción del tiempo que la cadena pasa en un estado tendremos que:

$$\begin{aligned}
\Pi_j(N) &= \frac{1}{E[\text{Tiempo entre visitas al estado j (en la cadena modificada)}]} \\
&= \frac{E[\text{Número de visitas a j entre visitas a i (en la cadena modificada)}]}{E[\text{Número de etapas entre visitas a i (en la cadena modificada}]} \\
&= \frac{E[\text{Número de visitas a j entre visitas a i (en la cadena original)}]}{E[\text{Número de etapas entre visitas a i (en la cadena modificada}]} \\
&= E[\text{Número de visitas a j entre visitas a i (en la cadena original)}] \cdot \Pi_i
\end{aligned}$$

El último paso se debe a que el resultado es independiente de la elección del comienzo y término de un ciclo.

d) En el paseo aleatorio simétrico tenemos que la cadena modificada es:

$$P_{i,i+1} = \frac{1}{2} = P_{i,i-1} \qquad i = 1, \ldots, N-1$$

$$P_{0,0} = \frac{1}{2} = P_{0,1}$$

$$P_{N,N} = \frac{1}{2} = P_{N,N-1}$$

Dado que la matriz es doblemente estocástica (ver ejercicio 4.12 del Ross), tendremos que:

$$\Pi_i(N) = \frac{1}{N+1} \qquad i = 1, \ldots, N$$

De la parte 2 vemos que:

$$E[\text{tiempo que la cadena original pasa en j entre visitas a i}] = 1$$

En particular consideramos $i = 0$ y obtenemos el resultado deseado.

Gustavo Angulo
gangulo@dim.uchile.cl

Diego Morán
dmoran@dim.uchile.cl