IN790: Modelos Estocásticos en Sistemas de Ingeniería
Profesor : Raúl Gouet
Auxiliares : Gustavo Angulo, Diego Morán

Clase Auxiliar CLAIO

10 de Septiembre de 2008

P1 Cada día uno de posibles n elementos son requeridos; el i-ésimo es requerido con probabilidad p_i, $i \geq 1$, $\sum_{i=1}^{n} p_i = 1$. Estos elementos son arreglados permanentemente en una lista ordenada que es revisada de la siguiente forma: El elemento seleccionado es puesto al tope de la lista y todo el resto es rearreglado respetando su posición relativa.

a) Argumente que el estado de la lista de elementos puede ser modelado como una cadena de Markov en tiempo discreto.

b) Para cualquier estado $i_1, \ldots, i_n$ (que es una permutación de $1, \ldots, n$) sea $\pi(i_1, \ldots, i_n)$ la probabilidad estacionaria de la cadena anterior. Argumente que:

$$\pi(i_1, \ldots, i_n) = P_{i_1} \cdot \frac{P_{i_2}}{1 - P_{i_1}} \cdots \frac{P_{i_{n-1}}}{1 - P_{i_1} - \cdots - P_{i_{n-2}}}$$

Sol: *a*) Es posible dado que un orden de la lista dado resume la información relevante para determinar cual será la evolución futura de la lista.

b) La probabilidad estacionaria puede ser interpretada de la siguiente forma: Cual es la probabilidad de, en el largo plazo, encontrar al sistema en un estado en particular $(i_1, \ldots, i_n)$. Para que esto ocurra obligatoriamente la u'ltima transición de la cadena involuvra haber escogido al elemento i_1, de hay el término P_{i_1}. Por otro lado, para encontrar como segundo elemento a i_2 en la última transición en la que no se escogió a i_1 se debe haber escogido a i_2. Al imponer esto surge el término $\frac{P_{i_2}}{1-P_{i_1}}$.

Extendiendo el razonamiento vemos que existirá una transición a partir de la cual se escogerá exclusivamente elementos en el subconjunto $\{i_1, \ldots, i_j\}$. Antes de esta transición, obligatoriamente se debe haber escogido a i_{j+1} para obtener el orden indicado. Como la elección se realiza solo entre los indices pertenecientes a $\{i_{j+1}, \ldots, i_n\}$ el término $\frac{P_{i_{j+1}}}{1-P_{i_1}-\ldots-P_{i_{j+1}}}$ aparece. Finalmente vemos que este razonamiento se extiende hasta el elemento i_{n-1} por cuanto la elección de este elemento entre i_n y i_{n-1} determina completamente el orden final de la lista.

P2 Se juega la final del campeonato shileno de futbol entre los equipos de San Felipe y Temuco. Este año, la sorprendente e imaginativa dirigencia de la ANFPE ha decidido implementar una nueva forma de definición de campeonato. Los equipos jugarán un partido tras otro hasta que alguno de los dos logre la suma de tres victorias consecutivas. Adicionalmente cada uno de los partidos de la final se definirá mediante lanzamientos penales en el caso de terminar en un empate. Esto significa que los únicos resultados posibles para cada partido son victoria para San Felipe o victoria para Temuco. Considere que la probabilidad de victoria (incluye definición a penales) de Temuco en cada partido es 0,6.

La dirigencia de la ANFPE, que espera llenar de publico cada uno de los partidos de la final, desea saber cual es el número esperado de partidos que se disputarán, de forma de decidir cuanto dinero se destinará a publicitar los encuentros.

a) Construya una cadena de Markov en tiempo discreto que le permita calcular el número esperado de encuentros. Clasifique los estados de esta cadena e identifique sus clases.

b) En base a la cadena el punto anterior calcule el número esperado de partidos que se jugarán y la probabilidad que Temuco se titule campeón del futbol shileno.

Sol: *a*) Existe más de una forma de responder. Modelamos según la siguiente cadena para usar el resultado obtenido en el problema 2.

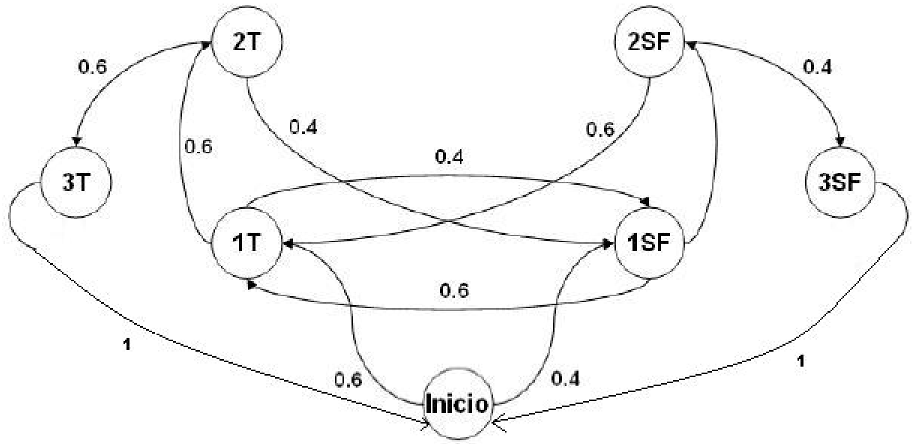

Figura 1: Esquema de la cadena de markov asociada

Vemos que existe una única clase recurrente y aperiódica, conformada por todos los estados.

b) Nos piden cual es el numero esperado de visitas a estados transientes de esta cadena, partiendo del estado de inicio. Usando nuestra notación habitual tenemos que:

$$\begin{aligned}
m_{1T} &= m_I \cdot 0{,}6 + m_{1SF} \cdot 0{,}6 + m_{2SF} \cdot 0{,}6 \\
m_{1SF} &= m_I \cdot 0{,}4 + m_{1T} \cdot 0{,}4 + m_{2T} \cdot 0{,}4 \\
m_{2T} &= m_{1T} \cdot 0{,}6 \\
m_{2SF} &= m_{1SF} \cdot 0{,}4 \\
m_I &= 1
\end{aligned}$$

Una vez despejados estos valores, vemos que la respuesta que buscamos es:

$$E(partidos) = m_{1SF} + m_{1T} + m_{2SF} + m_{2T} + 1$$

Donde el uno adicional se cuenta por el partido final.
Resolviendo numéricamente se tiene:

$$E(partidos) = 1{,}69 + 2{,}02 + 0{,}68 + 1{,}21 + 1 = 6{,}6$$

Utilizando el mismo razonamiento vemos que para calcular la probabilidad que Temuco gane debemos resolver el siguiente sistema.

$$\begin{aligned}
f_I &= f_{1T} \cdot 0{,}6 + f_{1SF} \cdot 0{,}4 \\
f_{1T} &= f_{2T} \cdot 0{,}6 + f_{1SF} \cdot 0{,}4 \\
f_{1SF} &= f_{1T} \cdot 0{,}6 + f_{2SF} \cdot 0{,}4 \\
f_{2T} &= 0{,}6 + f_{1SF} \cdot 0{,}4 \\
f_{2SF} &= f_{1T} \cdot 0{,}6
\end{aligned}$$

La respuesta que buscamos es

$$f_I = 0{,}72$$

P3 Considere una población de N individuos, cada cual al inicio de cada período puede estar en 3 condiciones posibles: *infeccioso*, *infectado pero no infeccioso* o *no infectado*. Si un individuo no infectado se infecta durante un período será infeccioso durante el período siguiente e infectado pero no infeccioso desde el período subsiguiente en adelante. Durante cada período, cada uno de los $\binom{N}{2}$ pares de individuo *entra en contacto* con probabilidad p, independiente de los demás. Si un par entra en contacto y uno de los individuos del par es infeccioso y el otro no infectado, el no infectado se infectará (por lo que será infeccioso el período siguiente). Sean X_n e Y_n el número de individuos infecciosos y el número de no infectados, respectivamente, en el período n.

a) Si hay i individuos infecciosos al inicio de un período, ¿cuál es la probabilidad de que un individuo no infectado particular se infecte en ese período?

b) ¿Es $\{X_n, n \geq 0\}$ una cadena de Markov? Si la respuesta es afirmativa, entregue sus probabilidades de transición.

c) ¿Es $\{Y_n, n \geq 0\}$ una cadena de Markov? Si la respuesta es afirmativa, entregue sus probabilidades de transición.

d) ¿Es $\{(X_n, Y_n), n \geq 0\}$ una cadena de Markov? Si la respuesta es afirmativa, entregue sus probabilidades de transición.

`Sol:`

a) $\alpha_i = 1 - (1-p)^i$

b) No.

c) No.

d) Sí, las probabilidades de transición en el caso $0 \leq k \leq j$ son $P(X_{n+1} = k, Y_{n+1} = j - k / X_n = i, Y_n = j) = \binom{j}{k}\alpha_i^k (1-\alpha_i)^{j-k}$.

Gustavo Angulo
gangulo@dim.uchile.cl

Diego Morán
dmoran@dim.uchile.cl