IN790: Modelos Estocásticos en Sistemas de Ingeniería
Profesor : Raúl Gouet
Auxiliares : Gustavo Angulo, Diego Morán

# Pauta Control 1

3 de Septiembre de 2008

**P1** Suponga que Ud. está dando un control de su ramo preferido, el IN790. El control consta de $n$ preguntas y tiene una duración de $H$ horas[1].

Se sabe que Ud. posee un estilo de responder controles muy particular: responde la pregunta $i$-ésima, $i = 1, \ldots, n$ con la $i$-ésima idea que llega a su cabeza. Suponga que estas ideas le llegan en un proceso de Poisson de tasa $\lambda > 0$ [*ideas/horas*]. Existen probabilidades $p_g$, $p_m$, de que cada idea, independiente de todo lo demás, sea *genial* o *mala* ($p_g + p_m = 1$). Si una idea es *genial* Ud. de seguro tendrá un 7.0 en la pregunta[2], en cambio si la idea es *mala* la nota que obtendrá es de un 1.0 en la pregunta.

a) (0,7 ptos.) Entregue una expresión para la probabilidad de alcanzar a terminar el control.

b) (0,8 ptos.) Calcule la probabilidad de *aperrar* en el control, es decir, de tener nota mayor o igual que 4.0[3].

c) (1 pto.) Escriba una expresión que permita calcular la probabilidad de sacarse un 7.0 en el control.

d) (0,5 ptos.) Calcule la probabilidad de sacarse un 7.0 en el control, pero suponiendo que los auxiliares se apiadan y deciden darles un tiempo infinito para que resuelvan el control ($H = \infty$).

Suponga ahora que la nota final del control se calcula promediando las $m$ mejores preguntas, donde $1 \leq m \leq n$.

e) (1 pto.) Calcule la probabilidad de sacarse un 7.0, dado que a Ud. le llegan $R \geq m$ ideas[4].

f) (1 pto.) Calcule la probabilidad de sacarse un 7.0.

Suponga que su estrategia cambia: Ud. comienza a dar el control y espera, sin hacer nada, hasta recibir *inspiración divina*. Se sabe que Ud. recibe *inspiración divina* si y sólo si Ud. sabe que pasará al menos un período de tiempo $T$ sin que le lleguen ideas a su cabeza. En el caso de recibir tal inspiración Ud. responderá perfectamente las $n$ preguntas del control.

Sea $W$ el tiempo que Ud. debería esperar para recibir *inspiración divina*.

g) (1 pto.) Calcule la esperanza de $W$, suponiendo $H = \infty$.

**Sol:** Sean

$$
\begin{aligned}
N(t) &= \text{cantidad de ideas que le llegan a su cabeza en el tiempo } t \\
N_g(t) &= \text{cantidad de ideas } \textit{geniales} \text{ que le llegan a su cabeza en el tiempo } t \\
N_m(t) &= \text{cantidad de ideas } \textit{malas} \text{ que le llegan a su cabeza en el tiempo } t \\
S_n &= \text{instante de llegada de la } n\text{-ésima pregunta a su cabeza} \\
X_1 &= \text{instante de llegada de la primera idea a su cabeza} \\
X_1^m &= \text{instante de llegada de la primera idea } \textit{mala} \text{ a su cabeza}
\end{aligned}
$$

[1] Si en las $H$ horas responde $k$ preguntas, con $0 \leq k \leq n$, entonces las $n-k$ preguntas que no alcanzó a responder serán calificadas con un 1.0.

[2] Lamentablemente, $p_g < 1$.

[3] La nota final del control es el promedio aritmético de las $n$ preguntas

[4] Se corrigió esta parte del enunciado, tal y como lo fue "verbalmente" en el control

Por la independencia de los sucesos, podemos decir que estamos en el caso *Poisson filtrado*, específicamente $N_g(t),\ N_m(t)$ se obtienen a partir de $N(t)$. Las tasas de cada proceso filtrado son, respectivamente $\lambda_g = p_g \cdot \lambda$ y $\lambda_m = p_m \cdot \lambda$.

*a*) La probabilidad pedida se puede calcular como

$$P(S_n \leq H) = \int_0^H \frac{\lambda^n s^{n-1} e^{-\lambda s}}{(n-1)!} ds$$

pues $S_n \sim Gamma(n, \lambda)$.

O bien, se puede calcular como

$$P(N(H) \geq n) = \sum_{k=n}^{\infty} P(N(H) = k)$$

que se puede calcular fácilmente pues $N(H) \sim Poisson(\lambda H)$.

*b*) Para aperrar se deben *contestar* al menos $\lceil \frac{n}{2} \rceil$ preguntas con ideas geniales. Considere $\lceil \frac{n}{2} \rceil \leq K \leq n$. Calcularemos la probabilidad de *contestar* exactamente $K$ preguntas con ideas geniales, que denotaremos $P_K$.

$$\begin{aligned}
P_K &= \sum_{k=K}^{\infty} P(contestar\ bien\ K\ /N(H) = k) P(N(H) = k) \\
&= \sum_{k=K}^{n} P(contestar\ bien\ K\ /N(H) = k) P(N(H) = k) + \sum_{k=n+1}^{\infty} P(contestar\ bien\ K\ /N(H) = k) P(N(H) = k) \\
&= \sum_{k=K}^{n} \binom{k}{K} p_g^K p_m^{k-K} P(N(H) = k) + \sum_{k=n+1}^{\infty} \binom{n}{K} p_g^K p_m^{n-K} P(N(H) = k)
\end{aligned}$$

Finalmente la probabilidad pedida es

$$P(aperrar) = \sum_{K=\lceil \frac{n}{2} \rceil}^{n} P_K$$

*c*) La probabilidad que queremos calcular es

$$P(7.0) = P(N_g(\text{mín}\{X_1^m, H\}) \geq n)$$

Condicionemos en $X_1^m$:

$$\begin{aligned}
P(7.0) &= \int_0^{\infty} P(N_g(\text{mín}\{X_1^m, H\}) \geq n / X_1^m = s) f_{X_1^m}(s) ds \\
&= \int_0^{H} P(N_g(\text{mín}\{s, H\}) \geq n / X_1^m = s) f_{X_1^m}(s) ds + \int_H^{\infty} P(N_g(\text{mín}\{s, H\}) \geq n / X_1^m = s) f_{X_1^m}(s) ds \\
&= \int_0^{H} P(N_g(s) \geq n / X_1^m = s) f_{X_1^m}(s) ds + \int_H^{\infty} P(N_g(H) \geq n / X_1^m = s) f_{X_1^m}(s) ds \\
&= \int_0^{H} P(N_g(s) \geq n) f_{X_1^m}(s) ds + \int_H^{\infty} P(N_g(H) \geq n) f_{X_1^m}(s) ds
\end{aligned}$$

donde $f_{X_1^m}(s) = \lambda_m e^{-\lambda_m s}$. No es necesario desarrollar las integrales o seguir calculando probabilidades para obtener todo el puntaje en esta pregunta. Con obtener la expresión anterior o similar basta.

*d*) Dado que no hay límite de tiempo ($H = \infty$), debemos calcular la probabilidad de que una exponencial de parámetro $\lambda_g$ *"gane"* $n$ veces seguidas. En este caso se obtiene:

$$P(7.0) = \left(\frac{\lambda_g}{\lambda_g + \lambda_m}\right)^n = p_g^n$$

*e*) Sea $P_R = P(7.0/\text{llegan } R \text{ ideas})$ la probabilidad que nos piden calcular.
Para obtener un 7.0 se deben *contestar* al menos $m$ de las $n$ preguntas con ideas geniales. Considere $m \leq L \leq R$. Calcularemos la probabilidad de contestar exactamente $L$ preguntas con ideas geniales dado que llegaron $R$ ideas, que denotaremos $P_L^R$.

$$\begin{aligned}
P_L^R &= \begin{cases} P(contestar\ bien\ L\ /N(H) = R), & \text{si } R \leq n \\ P(contestar\ bien\ L\ /N(H) = R), & \text{si } R \geq n+1 \end{cases} \\
&= \begin{cases} \binom{R}{L} p_g^L p_m^{R-L}, & \text{si } R \leq n \\ \binom{n}{L} p_g^L p_m^{n-L}, & \text{si } R \geq n+1 \end{cases}
\end{aligned}$$

Con esto

$$P_R = \sum_{L=m}^{n} P_L^R$$

*f*) "Descondicionando" la parte anterior se obtiene

$$\begin{aligned}
P(7.0) &= \sum_{R=m}^{\infty} P(7.0/\text{llegan } R \text{ ideas}) P(\text{llegan } R \text{ ideas}) \\
&= \sum_{R=m}^{\infty} P_R \cdot P(N(H) = R)
\end{aligned}$$

*g*) Condicionando y descondicionando en $X_1$, se puede calcular

$$\begin{aligned}
E(W) &= \int_0^{\infty} E(W/X_1 = s)\lambda e^{-\lambda s} ds \\
&= \int_0^{T} E(W/X_1 = s)\lambda e^{-\lambda s} ds + \int_T^{\infty} E(W/X_1 = s)\lambda e^{-\lambda s} ds \\
&= \int_0^{T} [s + E(W)]\lambda e^{-\lambda s} ds + \int_T^{\infty} 0 \cdot \lambda e^{-\lambda s} ds
\end{aligned}$$

donde estamos usando la propiedad de regeneración del proceso de Poisson, y que el tiempo de espera es 0 si sabemos que la próxima idea demorará un tiempo superior a $T$ en llegar.
Despejando $E(W)$ y desarrollando las integrales se llega a que:

$$E(W) = \frac{e^{\lambda T}}{\lambda} - \frac{1}{\lambda} - T$$

---

**P2** Luego de haber dado los controles del curso, un alumno se enfrenta a la evaluación final oral. Cada vez que el profesor le hace una pregunta, el alumno responde correctamente con probabilidad $p \in (0,1)$ independientemente de cómo le haya ido en las preguntas anteriores. Si la respuesta es correcta, el alumno suma 1 punto, y en caso contrario, resta 1 punto. El alumno parte con 2 puntos. Si en algún momento alcanza 4 puntos, entonces aprueba el curso. Por el contrario, si en algún momento tiene 0 puntos, entonces reprueba. Las preguntas son hechas según un proceso de Poisson de tasa $\lambda$ y deben ser respondidas inmediatamente.

*a*) (1,0 pto.) Calcule la esperanza de la cantidad de preguntas hechas hasta que el alumno aprueba o reprueba.
Indicación: condicione sobre el resultados de las dos primeras respuestas.

*b*) (1,0 pto.) Determine la razón entre la esperanza del puntaje final y la esperanza del tiempo que toma la evaluación.

Como en realidad el alumno quiere pasar con buena nota, llega a un acuerdo con el profesor. El puntaje inicial es 2. Cada vez que acumula 4 puntos, su nota final tiene un pequeño incremento, y cada vez que el puntaje llega a 0, el profesor le da una tarea para la casa. En ambos casos, el puntaje vuelve a 2 y se repite el procedimiento hasta que alguno de los dos se aburra.

*c*) (1,0 pto.) Calcule la esperanza de la cantidad de tareas acumuladas hasta el $k$-ésimo incremento de la nota.

*d*) (1,0 pto.) Calcule el número esperado de preguntas hechas hasta que el alumno obtiene dos incrementos de su nota sin recibir tarea entre ellos.

Después de varias preguntas, la evaluación no ha terminado, por lo que el profesor se aburrió y decidió cambiar el sistema. Ahora, al alumno se le entregan $Q$ preguntas, las cuales irá respondiendo de forma sucesiva e independiente de las demás. Al responder cada pregunta, el alumno primero mira el techo durante un tiempo exponencial de parámetro $\mu_1$, luego del cual recibe *inpiración divina* y se pone a escribir durante un tiempo exponencial de parámetro $\frac{\mu_2}{t}$, donde $t$ es el tiempo que estuvo mirando el techo. El alumno tendrá una penalidad $c$ por unidad de tiempo por cada pregunta que tenga pendiente. Cada vez que termina las $Q$ preguntas que tiene en mano, recibe una bonificación $K$ y se le entrega otras $Q$ preguntas para que las responda, y este proceso se repite sucesivamente. El alumno aprueba si en el largo plazo está obteniendo resultado positivo por unidad de tiempo.

*e*) (1,0 pto.) Calcule la probabilidad a largo plazo de encontrar al alumno mirando el techo.

*f*) (1,0 pto.) Determine $Q^*$ máximo tal que el alumno aprueba.

**Sol:** *a*) Sea $X_i$ el puntaje de la $i$-ésima pregunta. Luego

$$X_i = \begin{cases} 1 & \text{con prob} \quad p \\ -1 & \text{con prob} \quad 1-p \end{cases}$$

Sea $S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$ el puntaje acumulado luego de responder la enésima pregunta.
Sea $N = \inf\{n : S_n \in \{0,4\}\}$

$$\begin{aligned} E[N] &= E[N|X_1=1,X_2=1]P[X_1=1,X_2=1] + E[N|X_1=1,X_2=0]P[X_1=1,X_2=-1] \\ &\quad + E[N|X_1=-1,X_2=1]P[X_1=-1,X_2=1] + E[N|X_1=-1,X_2=-1]P[X_1=-1,X_2=-1] \\ &= 2p^2 + 2(2+E[N])p(1-p) + 2(1-p)^2 \\ &= 2 + 2E[N]p(1-p) \end{aligned}$$

Luego

$$E[N] = \frac{2}{2p^2 - 2p + 1}$$

*b*) De la parte anterior, $N$ es un tiempo de parada de esperanza finita. Además $E[X_i] = 2p - 1$. Luego, aplicando Wald

$$E\left[2 + \sum_{i=1}^{N} X_i\right] = 2 + E[N]E[X_1] = 2 + \frac{2(2p-1)}{2p^2 - 2p + 1} = \frac{4p^2}{2p^2 - 2p + 1}$$

Es claro que los tiempos $T_i$ entre preguntas consecutivas son exponenciales iid de parámetro $\lambda$. Nuevamente por Wald

$$E\left[\sum_{i=1}^{N} T_i\right] = E[N]E[T_1] = \frac{2}{\lambda(2p^2 - 2p + 1)}$$

Luego

$$\frac{E\left[2 + \sum_{i=1}^{N} X_i\right]}{E\left[\sum_{i=1}^{N} T_i\right]} = 2p^2\lambda$$

*c*) Sea $M$ el número de tareas entre dos incrementos de la nota

$$\begin{aligned} E[M] &= 2E[M|X_1 = 1, X_2 = -1]P[X_1 = 1, X_2 = -1] + E[M|X_1 = -1, X_2 = -1]P[X_1 = -1, X_2 = -1] \\ &= 2E[M]p(1-p) + (1 + E[M])(1-p)^2 \end{aligned}$$

Entonces

$$E[M] = \left(\frac{1-p}{p}\right)^2$$

Como las distribuciones entre regeneraciones son iid, entonces la cantidad pedida es

$$k\left(\frac{1-p}{p}\right)^2$$

*d*) Hay al menos 3 formas de hacer esta pregunta, pero a continuación usaremos Blackwell a modo de ejemplo.

Consideremos una regeneración cada vez que el alumno consigue dos incrementos sin obtener tarea. Sea $T$ el número de preguntas necesarias para esto, y sea $T_R$ el número de preguntas entre regeneraciones. Si acaba de ocurrir una regeneración, entonces el tiempo esperado para la siguiente cumple

$$E[T_R] = 2p^2 + 2(2 + E[T_R])p(1-p) + (E[T] + 2)(1-p)^2$$

$$\Longrightarrow E[T] = \frac{E[T_R](1 - 2p(1-p)) - 2}{(1-p)^2}$$

Por otro lado, es claro que las regeneraciones sólo pueden ocurrir cuando el número de preguntas es par. Usando Blackwell

$$\lim_{n\to\infty} P(\text{renovación en } 2n) = \frac{2}{E[T_R]}$$

Ahora, puede haber renovación en $2n$ sólo si tuvo un incremento de nota en $2n$, lo cual equivale a que las dos respuestas anteriores hayan sido correctas.

$$P(\text{renovación en } 2n) = P(\text{renovación en } 2n | X_{2n-1} = 1, X_{2n-2} = 1)P(X_{2n-1} = 1, X_{2n-2} = 1)$$

Sabiendo que las dos respuesta anteriores fueron correctas, la probabilidad de que haya renovación en $2n$ es igual la probabilidad de haber obtenido un incremento previamente.

$$P(\text{incremento previo}) = p^2 + 2P(\text{incremento previo})p(1-p)$$

$$\Longrightarrow P(\text{incremento previo}) = \frac{p^2}{1 - 2p(1-p)}$$

$$\Longrightarrow \lim_{n\to\infty} P(\text{renovación en } 2n) = \frac{p^4}{1-2p(1-p)}$$

$$\Longrightarrow E[T_R] = \frac{2(1-2p(1-p))}{p^4}$$

$$\Longrightarrow E[T] = 2\frac{1-2p+3p^2}{p^4}$$

*e*) Decimos que el sistema está en *OFF* si el alumno está mirando el techo, y *ON* si está escribiendo. Sean $T_{OFF}$ y $T_{ON}$ los tiempos asociados

$$E[T_{OFF}] = \frac{1}{\mu_1}$$

$$\begin{aligned} E[T_{ON}] &= \int_0^\infty E[T_{ON}|T_{OFF}=t]dP[T_{OFF}=t] \\ &= \int_0^\infty \frac{t}{\mu_2}\mu_1 e^{-\mu_1 t}dt \\ &= \frac{1}{\mu_1\mu_2} \end{aligned}$$

Luego

$$\lim_{t\to\infty} P(OFF(t)) = \frac{E[T_{OFF}]}{E[T_{ON}]+E[T_{OFF}]} = \frac{\mu_2}{1+\mu_2}$$

*f*) Definimos un ciclo como el intervalo desde que el alumno recibe $Q$ preguntas hasta que las entrega. Sean $T_i$ el tiempo que toma responder la pregunta i-ésima, $T$ la duración del ciclo y $R$ su recompensa.

$$E[T_i] = E[T_{ON}] + E[T_{OFF}] = \frac{1+\mu_2}{\mu_1\mu_2} \equiv \mu$$

$$\Longrightarrow E[T] = Q\mu$$

$$E[R] = E\left[K - \sum_{i=1}^{Q} c(Q-i+1)T_i\right] = K - c\mu\frac{Q(Q+1)}{2}$$

Luego

$$\frac{E[R]}{E[T]} = \frac{K}{Q\mu} - c\frac{Q+1}{2}$$

El alumno aprueba si

$$\frac{K}{Q\mu} > c\frac{Q+1}{2}$$

$$\Longleftrightarrow 0 > Q^2 + Q - \frac{2K}{c\mu}$$

Así

$$Q^* = \left\lfloor \frac{-1+\sqrt{1+\frac{8K}{c\mu}}}{2} \right\rfloor$$