Clase Auxiliar 6

24 de Septiembre de 2008

P1 En un pequeño centro hospitalario se tiene la urgencia de instalar equipos nuevos. Estos equipos son muy costosos y se deben manejar con mucho cuidado por lo que se necesita que el establecimiento esté vacío al momento de la instalación. El problema es que actualmente se tiene M pacientes en el centro (y los equipos no llegarán hasta que no haya nadie).

Cada mañana un doctor evalúa la condición de los pacientes para ver si son dados de alta. Se ha determinado que cada paciente tiene una probabilidad p de estar rehabilitado y salir del centro y una probabilidad $(1-p)$ de seguir internado, independiente de lo que ocurra con los demás pacientes. Nadie puede ingresar al centro hasta después de instalados los equipos.

a) Muestre que el sistema descrito puede ser modelado como una cadena de Markov en tiempo discreto, dibuje el grafo correspondiente, identifique las clases y clasifique sus estados.

b) Si el sistema tiene inicialmente M pacientes, ¿cuál es la probabilidad que algún día tenga $M-1$?, ¿cuál es la probabilidad que algún día se puedan instalar los equipos?. Encuentre estas probabilidades y fundamente adecuadamente sus respuestas.

Ahora suponga que la instalación de los equipos ya se realizó, por lo que pueden llegar pacientes al centro hospitalario. Se sabe que la probabilidad que lleguen k pacientes en un día es q_k, con $k = 0, 1, 2....$ Además el centro sólo cuenta con C camas, por lo que si llega una persona y no hay cama disponible, ésta es derivada a otro centro médico. Considere que una persona que ingresa al centro es internada al menos por una noche (no puede tener el alta sin una evaluación positiva del doctor que pasa revisión en la mañana).

c) Modifique su modelo para esta nueva situación y dibuje el grafo correspondiente, identifique las clases y clasifique los estados.

P2 Considere un jugador que apuesta sucesivas veces en el mismo juego. En cada jugada existe una probabilidad p de ganar una unidad y una probabilidad $1-p$ de perder una unidad. Se asume que las jugadas sucesivas son independientes. El jugador comienza con una cantidad i, $1 < i < N$, y juega hasta que pierde todo o llega a N.

a) Construya una cadena de Markov que describa la fortuna del jugador en cada instante. Incluya las probabilidades de transición.

b) El jugador al llegar a N cambia su estrategia y decide apostar doble o nada, de manera que con probabilidad p su riqueza es $2N$ (y se retira), mientras con probabilidad $1-p$ pierde todo (y su riqueza se reduce a cero). Modele esta nueva situación.

c) Si en la situación de la parte (a), la probabilidad de ganar es $p = \frac{1}{2}$, ¿De qué depende que nuestro jugador finalmente gane o pierda?. Sin hacer cálculos entregue valores específicos cuando se pueda e interprete sus resultados.

d) Resuelva el problema para el caso general , es decir, encuentre las probabilidades de terminar ganando o perdiendo el juego si se empieza con una cantidad i, $1 < i < N$. Se juega hasta que pierde todo o llega a N, con $p \neq (1-p)$.

P3 Considere una cadena de Markov con todos sus estados perteneciendo a una misma clase recurrente positiva que parte en el estado inicial 0. Sea m_i el número esperado de períodos que la cadena pasa en el estado i antes de retornar a 0.

a) Usando la ecuación de Wald, muestre que:

$$m_j = \sum_i m_i P_{ij} \quad j > 0$$

$$m_0 = 1$$

b) Relacionando los m_j con la proporción del tiempo que el sistema pasa en el largo plazo en el estado j para $j > 0$, vuelva a argumentar el resultado anterior.

P4 Sea $\{X_n : n \geq 1\}$, una cadena de Markov irreductible que tiene un conjunto numerable de estados. Considere ahora un nuevo proceso estocástico $\{Y_n : n \geq 1\}$ que sólo acepta valores de la cadena de Markov que estén entre 0 y N. Esto es, se define Y_n con el n-ésimo valor de la cadena de Markov que está entre 0 y N. Por ejemplo, si $N = 3$ y $X_1 = 1,\ X_2 = 3,\ X_3 = 5,\ X_4 = 6,\ X_5 = 2$ entonces $Y_1 = 1,\ Y_2 = 3,\ Y_3 = 2$.

a) ¿Es $\{Y_n : n \geq 1\}$ una cadena de Markov?. Explique su respuesta.

b) Sea π_i la proporción del tiempo que $\{X_n : n \geq 1\}$ está en el estado i. Si $\pi_i > 0 \quad \forall i$, ¿qué proporción del tiempo está $\{Y_n : n \geq 1\}$ en el estado j?.

c) Suponga que X_n es recurrente nulo y sea $\Pi_i(N)$ la proporción del tiempo que $\{Y_n : n \geq 1\}$ pasa en el estado i, $i = 1, \ldots, N$. Muestre que:

$$\Pi_j(N) = \Pi_i(N) \cdot E[\text{tiempo que el proceso } X \text{ pasa en } j \text{ entre retornos a } i],\ i \neq j$$

d) Use la parte (c) para argumentar que en el paseo aleatorio simétrico el número esperado de visitas a un estado i antes de retornar al origen es 1.

Gustavo Angulo
gangulo@dim.uchile.cl

Diego Morán
dmoran@dim.uchile.cl