IN790: Modelos Estocásticos en Sistemas de Ingeniería
Profesor : Raúl Gouet
Auxiliares : Gustavo Angulo, Diego Morán

Clase Auxiliar 4

27 de Agosto de 2008

P1 En t=0 un ratón es abandonado en el centro de un laberinto, lugar en el cual debe elegir entre tres posibles rutas a seguir. La ruta 1 lo lleva por un camino que tras dos minutos de viaje lo regresa al centro del laberinto, no sin antes encontrar un gran trozo de queso. La ruta 2 lo lleva por un camino que lo regresa al centro del laberinto tras 4 minutos de viaje, pero que no contiene queso alguno. Finalmente la ruta 3 lo lleva por un camino donde el ratón nuevamente no encuentra queso y lo regresa al centro del laberinto tras 8 minutos de viaje. Suponga que cada vez que el ratón llega al centro del laberinto elige equiprobablemente la ruta que seguirá, sin recordar elecciones pasadas. Sea T el tiempo que demora el ratón en encontrar el pedazo de queso (suponga que éste está al final de la ruta 1).

a) Defina una secuencia de variables aleatorias independientes idénticamente distribuidas $X_1; X_2; ...$ y un tiempo de parada N tal que:

$$T = \sum_{i=1}^{N} X_i$$

b) Use la ecuación de Wald para encontrar $E[T]$

c) Calcule $E[\sum_{i=1}^{n} X_i | N = n]$ y note que no es igual a $E[\sum_{i=1}^{n} X_i]$.

d) Use el resultado anterior para recalcular $E[T]$.

Sol: *a*) La secuencia de variables aleatorias es:

$$X_i = \begin{cases} 2 & \text{con prob}\frac{1}{3} \\ 4 & \text{con prob}\frac{1}{3} \\ 8 & \text{con prob}\frac{1}{3} \end{cases}$$

El tiempo de parada será:

$$N_p = \inf\{n : X_n = 2\}$$

Viendo $E[N_p]$ como la derivada de una serie, podemos probar que $E[N_p] = 3 < \infty$

b) Dado que $E[N_p] < \infty$ Wald dice que:

$$\begin{aligned} E[T] &= E[X] \cdot E[N_p] \\ &= \frac{14}{3} \cdot 3 \\ &= 14 \end{aligned}$$

c) Si sabemos que $N = n$, entonces sabemos que el último sumando es 2 y la distribución de los otros tiempos que se sumaron es la siguiente:

$$Y_i = \begin{cases} 4 & \text{con prob}\frac{1}{2} \\ 8 & \text{con prob}\frac{1}{2} \end{cases}$$

Entonces:

$$E\left[\sum_{i=1}^{n} X_i | N = n\right] = 2 + (n-1) \cdot E[Y_i] = 2 + (n-1)6$$

Por otro lado:

$$E\left[\sum_{i=1}^{n} X_i\right] = n \cdot E[X_i] = n \cdot \frac{14}{3}$$

d) Entonces:

$$\begin{aligned}
E[T] &= \sum_{n=1}^{\infty} E\left[\sum_{i=1}^{n} X_i | N = n\right] \cdot P[N=n] \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} (2 + (n-1)6) \cdot P[N=n] \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} (2 + (n-1)6) \cdot \frac{1}{3}\frac{2}{3}^{n-1} \\
&= -4 + \sum_{n=1}^{\infty} 6 \cdot n \cdot \frac{1}{3}\frac{2}{3}^{n-1} \\
&= -4 + 18 \\
&= 14
\end{aligned}$$

P2 *a*) Considere un proceso de renovación $\{N(t), t \geq 0\}$ con tiempos entre arribos $X_n, n \geq 1$ con distribución común F, y suponga que cada tiempo en que una renovación ocurre recibimos una recompensa. Sea R_n la recompensa recibida el instante de la n-ésima renovación. Suponga que $E(X) < \infty$, $E(R) < \infty$ y que las variables R_n son i.i.d. Sea

$$R(t) = \sum_{i=1}^{N(t)} R_i$$

Demuestre que:

$$\lim_{t\to\infty} \frac{E[R(t)]}{t} = \frac{E[R]}{E[X]}$$

Para esto defina un tiempo de parada, utilice la ecuación de Wald y el teorema elemental de renovación.

b) Como una extensión al "Happy Puerto", los organizadores han decidido que, para acercar más aún a los participates a la vida porteña, los asistentes pueden continuar el "evento" en botes que zarpan desde puerto exactamente cada T unidades de tiempo. Se estima que la llegada de pasajeros a los barcos se producirá de acuerdo a un proceso de Poisson de tasa λ. Un pasajero que llega al puerto esperará la partida del próximo barco con probabilidad $e^{-\mu t}$ si el tiempo hasta esta partida es t. Un costo fijo K es incurrido cada vez que un bote sale de puerto y el precio de un boleto para el tour es r. Muestre que el valor de T que maximiza la utilidad esperada por unidad de tiempo en el largo plazo es la única solución a la siguiente ecuación:

$$e^{-\mu T}\left(r\lambda T + \frac{r\lambda}{\mu}\right) = \frac{r\lambda}{\mu} - K$$

sujeto a que $\frac{r\lambda}{\mu} > K$.

Sol: *a*) Vemos que

$$R(t) = \sum_{n=1}^{N(t)+1} R_n - R_{N(t)+1}$$

$N(t)+1$ es un tiempo de parada, por lo tanto, aplicando Wald

$$
\begin{aligned}
\frac{E[R(t)]}{t} &= \frac{E\left[\sum_{n=1}^{N(t)+1} R_n\right] - E\left[R_{N(t)+1}\right]}{t} \\
&= \frac{E[N(t)+1]}{t} E[R_1] - \frac{E[R_{N(t)+1}]}{t}
\end{aligned}
$$

Usando el teorema elemental de renovación

$$
\begin{aligned}
\lim_{t\to\infty} \frac{E[N(t)+1]}{t} &= \lim_{t\to\infty} \frac{E[N(t)]}{t} + \frac{1}{t} \\
&= \frac{1}{E[X_1]}
\end{aligned}
$$

Por otro lado, se puede demostrar que

$$
\lim_{t\to\infty} \frac{E\left[R_{N(t)+1}\right]}{t} = 0
$$

Luego

$$
\lim_{t\to\infty} \frac{E[R(t)]}{t} = \frac{E[R_1]}{E[X_1]}
$$

b) Para realizar esto utilizamos un proceso de renovación con recompensa y utilizamos el resultado de la parte 1 de esta pregunta. Definiendo un ciclo cada T unidades de tiempo (desde que parte un barco hasta parte el siguiente) tendremos que

$$
\lim_{t\to\infty} \frac{R(t)}{t} = \frac{E[\text{Ganancia en un ciclo}]}{E[\text{Largo de un ciclo}]}
$$

Claramente

$$
E[\text{Largo de un ciclo}] = T
$$

y

$$
E[\text{Ganancia en un ciclo}] = r \cdot E[N] - K
$$

donde N es el numero de personas que se suben a un barco.

Por otro lado, condicional en que llegaron n personas a visitar el puerto, tendremos que la probabilidad de que una de esas personas se suba al barco dado que llegó en el instante t (desde que se fue el barco anterior) es $e^{-\mu(T-t)}$. Pero nosotros conocemos la distribución condicional de la llegada de las personas (uniforme $[0,T]$), por lo tanto, independiente del instante de llegada, cada una de las n personas que visitó el puerto se subió al barco con probabilidad

$$
\begin{aligned}
P &= \int_0^T e^{-\mu(T-t)} \frac{dt}{T} \\
&= \int_0^T e^{-\mu x} \frac{dx}{T} \\
&= \frac{1}{\mu T}[1 - e^{-\mu T}]
\end{aligned}
$$

Por lo tanto, concluimos que la llegada al puerto de personas que se suben al barco es Poisson de tasa λP, y por lo tanto

$$
E[N] = \lambda T \cdot \frac{1}{\mu T}[1 - e^{-\mu T}] = \frac{1}{\mu}\lambda[1 - e^{-\mu T}]
$$

Concluimos que

$$R = \lim_{t\to\infty} \frac{R(t)}{t} = \frac{1}{\mu T}\lambda r[1 - e^{-\mu T}] - \frac{K}{T}$$

Para encontrar el T^* que maximiza las ganancias de largo plazo, derivamos e igualamos a 0 $\Rightarrow$

$$\frac{dR}{dT} = e^{-\mu T}\left(r\lambda T + \frac{r\lambda}{\mu}\right) + K - \frac{r\lambda}{\mu} = 0$$

Reordenando térmimos tendremos que

$$e^{-\mu T}\left(r\lambda T + \frac{r\lambda}{\mu}\right) = \frac{r\lambda}{\mu} - K$$

P3 Pasajeros llegan a una estación de trenes de acuerdo a un procesos de renovación con tiempo entre llegadas medio igual a μ. Cuando se juntan N pasajeros en la estación, parte un tren. Si hay n pasajeros esperando, la estación percibe un costo a una tasa de $\$n \cdot c$ por unidad de tiempo. Además cada vez que un tren es despachado incurre en un costo de $\$K$.

a) Calcule el costo promedio por unidad de tiempo incurrido por la estación en el largo plazo.

En lo que sigue considere que el proceso de renovación de llegada de pasajeros es un proceso de Poisson de media μ.

b) Suponga otro tipo de política en que el tren parte cada T unidades de tiempo. Calcule el costo promedio por unidad de tiempo en el largo plazo con esta nueva política y encuentre el T^*, el valor de T que lo minimiza.

c) Sea N^* el valor de N que minimiza el costo promedio por unidad de tiempo incurrido por la estación, si un tren parte cuando se juntan N personas esperando (parte(a)). Muestre que la política en la que el tren parte cuando se juntan N^* pasajeros entrega un costo promedio por unidad de tiempo menor que la política en la que el tren parte cada T^* unidades de tiempo (parte(b)). Entregue alguna intuición del resultado.

Sol: *a*) En este caso el ciclo quedará definido como el tiempo entre dos partidas consecutivas de trenes. El tiempo esperado del ciclo es el tiempo en que esperamos lleguen N personas, por lo que E[Largo de un ciclo] $= N\cdot\mu$. Si llamamos X_n al tiempo entre el n y el $(n+1)$-ésimo pasajero llegando a la estación se tendrá que la esperanza del costo de un ciclo puede escribirse como:

$$\begin{aligned} E[\text{Costo de un ciclo}] &= E\left[\sum_{i=1}^{N-1} c\cdot i\cdot X_i\right] + K \\ &= \frac{c\cdot\mu\cdot N(N-1)}{2} + K \end{aligned}$$

De esta manera el costo esperado por unidad de tiempo será $\frac{c\cdot(N-1)}{2} + \frac{K}{N\cdot\mu}$.

b) En este caso el largo del ciclo está predeterminado y será igual a T. Para calcular el costo del ciclo hay que utilizar esperanzas condicionales de manera que si llamamos X_n al tiempo entre el n y el $(n+1)$-ésimo pasajero llegando a la estación se tendrá que la esperanza del costo de un ciclo puede escribirse como:

$$\begin{aligned} E[\text{Costo de un ciclo}] &= \sum_{j=0}^{\infty} E\Big[\text{costo de un ciclo}|N(T)=j] \cdot P[N(T)=j] + K \\ &= \sum_{j=0}^{\infty} j\cdot\frac{T\cdot c}{2}\cdot P[N(T)=j] + K \\ &= \frac{T^2\cdot c}{2\cdot\mu} + K \end{aligned}$$

Así, el costo por unidad de tiempo será $\frac{c \cdot T}{2 \cdot \mu} + \frac{K}{T}$

c) De la parte (a) podemos encontrar el número de pasajeros que minimiza el costo esperado por unidad de tiempo, el que resulta $N^* = \sqrt{\frac{2K}{\mu \cdot c}}$. Así, el costo promedio por unidad de tiempo óptimo será:

$$\frac{c}{2} \cdot \sqrt{\frac{2K}{\mu \cdot c}} - \frac{c}{2} + \frac{K}{u \cdot \sqrt{\frac{cK}{\mu \cdot c}}} = \sqrt{\frac{c \cdot K}{\mu}} - \frac{c}{2}$$

De la parte (b) se tiene que el tiempo óptimo de ciclo será $T^* = \sqrt{\frac{2\mu \cdot K}{c}}$. Así, el costo promedio por unidad de ciclo será:

$$\sqrt{\frac{c \cdot K}{\mu}}$$

Gustavo Angulo
gangulo@dim.uchile.cl

Diego Morán
dmoran@dim.uchile.cl