FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICAS Y MATEMÁTICAS UNIVERSIDAD DE CHILE

IN790: Modelos Estocásticos en Sistemas de Ingeniería
Profesor : Raúl Gouet
Auxiliares : Gustavo Angulo, Diego Morán

Clase Auxiliar 4

27 de Agosto de 2008

P1 En t=0 un ratón es abandonado en el centro de un laberinto, lugar en el cual debe elegir entre tres posibles rutas a seguir. La ruta 1 lo lleva por un camino que tras dos minutos de viaje lo regresa al centro del laberinto, no sin antes encontrar un gran trozo de queso. La ruta 2 lo lleva por un camino que lo regresa al centro del laberinto tras 4 minutos de viaje, pero que no contiene queso alguno. Finalmente la ruta 3 lo lleva por un camino donde el ratón nuevamente no encuentra queso y lo regresa al centro del laberinto tras 8 minutos de viaje. Suponga que cada vez que el ratón llega al centro del laberinto elige equiprobablemente la ruta que seguirá, sin recordar elecciones pasadas. Sea T el tiempo que demora el ratón en encontrar el pedazo de queso (suponga que éste está al final de la ruta 1).

a) Defina una secuencia de variables aleatorias independientes idénticamente distribuidas $X_1; X_2; ...$ y un tiempo de parada N tal que:

$$T = \sum_{i=1}^{N} X_i$$

b) Use la ecuación de Wald para encontrar $E[T]$

c) Calcule $E[\sum_{i=1}^{n} X_i | N = n]$ y note que no es igual a $E[\sum_{i=1}^{n} X_i]$.

d) Use el resultado anterior para recalcular $E[T]$.

P2 *a*) Considere un proceso de renovación $\{N(t), t \geq 0\}$ con tiempos entre arribos $X_n, n \geq 1$ con distribución común F, y suponga que cada tiempo en que una renovación ocurre recibimos una recompensa. Sea R_n la recompensa recibida el instante de la n-ésima renovación. Suponga que $E(X) < \infty$, $E(R) < \infty$ y que las variables R_n son i.i.d. Sea

$$R(t) = \sum_{i=1}^{N(t)} R_i$$

Demuestre que:

$$\lim_{t \to \infty} \frac{E[R(t)]}{t} = \frac{E[R]}{E[X]}$$

Para esto defina un tiempo de parada, utilice la ecuación de Wald y el teorema elemental de renovación.

b) Como una extensión al "Happy Puerto", los organizadores han decidido que, para acercar más aún a los participates a la vida porteña, los asistentes pueden continuar el "evento" en botes que zarpan desde puerto exactamente cada T unidades de tiempo. Se estima que la llegada de pasajeros a los barcos se producirá de acuerdo a un proceso de Poisson de tasa λ. Un pasajero que llega al puerto esperará la partida del próximo barco con probabilidad $e^{-\mu t}$ si el tiempo hasta esta partida es t. Un costo fijo K es incurrido cada vez que un bote sale de puerto y el precio de un boleto para el tour es r. Muestre que el valor de T que maximiza la utilidad esperada por unidad de tiempo en el largo plazo es la única solución a la siguiente ecuación:

$$e^{-\mu T} \left(r\lambda T + \frac{r\lambda}{\mu} \right) = \frac{r\lambda}{\mu} - K$$

sujeto a que $\frac{r\lambda}{\mu} > K$.

P3 Pasajeros llegan a una estación de trenes de acuerdo a un procesos de renovación con tiempo entre llegadas medio igual a μ. Cuando se juntan N pasajeros en la estación, parte un tren. Si hay n pasajeros esperando, la estación percibe un costo a una tasa de $\$n \cdot c$ por unidad de tiempo. Además cada vez que un tren es despachado incurre en un costo de $\$K$.

a) Calcule el costo promedio por unidad de tiempo incurrido por la estación en el largo plazo.

En lo que sigue considere que el proceso de renovación de llegada de pasajeros es un proceso de Poisson de media μ.

a) Suponga otro tipo de política en que el tren parte cada T unidades de tiempo. Calcule el costo promedio por unidad de tiempo en el largo plazo con esta nueva política y encuentre el T^*, el valor de T que lo minimiza.

b) Sea N^* el valor de N que minimiza el costo promedio por unidad de tiempo incurrido por la estación, si un tren parte cuando se juntan N personas esperando (parte(a)). Muestre que la política en la que el tren parte cuando se juntan N^* pasajeros entrega un costo promedio por unidad de tiempo menor que la política en la que el tren parte cada T^* unidades de tiempo (parte(b)). Entregue alguna intuición del resultado.

Gustavo Angulo
gangulo@dim.uchile.cl

Diego Morán
dmoran@dim.uchile.cl