



## SOLUCIÓN CONTROL 1

### 1 de Septiembre de 2005

#### Problema 1

1. El piloto ganador es el último en llegar y lo hace con velocidad igual a la de segundo mayor valor. Partamos suponiendo que llegaron  $n$  pilotos a inscribirse para la carrera. La densidad del segundo mayor valor entre  $n$  variables aleatorias de distribución  $F$  es:

$$x \rightsquigarrow n(n-1)\overline{F}(x) \cdot f(x) \cdot F(x)^{n-2}$$

Notemos que la distribución  $F$  de la velocidad para un piloto llegado en el instante  $s$  se puede obtener como:  
 $F(x) = P(V < x) = P(\frac{s}{T} < x) = P(s < x \cdot T) = \frac{x \cdot T}{T} = x$

Lo anterior es válido para  $x \in [0, 1]$ . Luego,  $V$  sigue una Uniforme en  $[0, 1]$ .

En el caso de variables  $U[0, 1]$ , la distribución de la 2da mayor velocidad es  $n(n-1)x^{n-2}(1-x)$ . La esperanza de la velocidad del ganador, condicional a que llegaron  $n$  ( $n > 0$ ) personas, es entonces:

$$\begin{aligned} Q_n &= \int_0^1 x \cdot n \cdot (n-1) \cdot x^{n-2}(1-x) dx \\ &= \int_0^1 n \cdot (n-1) \cdot (x^{n-1} - x^n) dx \\ &= \int_0^1 n \cdot (n-1) \cdot x^{n-1} - \int_0^1 n \cdot (n-1) \cdot x^n dx \\ &= (n-1) - \frac{n \cdot (n-1)}{n+1} \\ &= \frac{n-1}{n+1} \end{aligned}$$

Para obtener la respuesta deseada simplemente debemos descondicionar del número de llegadas:

$$\begin{aligned} Q &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n-1}{n+1} \frac{e^{-\lambda T} (\lambda T)^n}{n!} \\ &= (1 - e^{-\lambda T}) - \frac{2}{\lambda T} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{-\lambda T} (\lambda T)^{n+1}}{(n+1)!} \\ &= (1 - e^{-\lambda T}) - \frac{2}{\lambda T} [1 - e^{-\lambda T} - e^{-\lambda T} \cdot \lambda T] \\ &= (1 + e^{-\lambda T}) - \frac{2}{\lambda T} [1 - e^{-\lambda T}] \end{aligned}$$

2. Para que entonces gane un agresivo, se requiere que no lleguen pilotos después de  $s$  o, si llegan, que el último que lo haga sea *agresivo*. Luego, la probabilidad pedida es:

$$P = e^{-\lambda(T-s)} + \frac{p_a}{p_a + p_m + p_d} (1 - e^{-\lambda(T-s)}) = e^{-\lambda(T-s)} + p_a(1 - e^{-\lambda(T-s)})$$

3. Sea  $G(t)$  el número de kilómetros que un auto puede recorrer en  $t$ .  $G(t)$  puede ser escrito de la siguiente forma:

$$G(t) = G_0 e^{-\alpha t} + \sum_{i=1}^{N(t)} G_i e^{-\alpha(t-S_i)}$$

donde  $S_i$  denota el instante de la  $i$ -ésima pasada a pits. Calculemos primero el término de la derecha, condicionando a  $N(t)$ , el número de pasada a pits (que sigue un proceso de Poisson de tasa  $\mu$ ):

$$\begin{aligned} E[G(t)/N(t) = n] &= E[G_0 e^{-\alpha t}/N(t) = n] + E\left[\sum_{i=1}^{N(t)} G_i e^{-\alpha(t-S_i)}/N(t) = n\right] \\ &= G_0 e^{-\alpha t} + E\left[\sum_{i=1}^n G_i e^{-\alpha(t-S_i)}/N(t) = n\right] \\ &= G_0 e^{-\alpha t} + \sum_{i=1}^n E[G_i e^{-\alpha(t-S_i)}/N(t) = n] \\ &= G_0 e^{-\alpha t} + \sum_{i=1}^n E[G_i/N(t) = n] E[e^{-\alpha(t-S_i)}/N(t) = n] \\ &= G_0 e^{-\alpha t} + E[G] \sum_{i=1}^n E[e^{-\alpha(t-S_i)}/N(t) = n] \\ &= G_0 e^{-\alpha t} + E[G] e^{-\alpha t} \sum_{i=1}^n E[e^{\alpha S_i}/N(t) = n] \end{aligned}$$

Donde hemos usado propiedades de la esperanza y la independencia de los  $G_i$  y  $N(t)$ . Llamando  $G$  a la distribución común de los  $G_i$  y sabiendo que es v.a. exponencial de parámetro  $\gamma$ , se tiene que  $E[G] = \frac{1}{\gamma}$ . Además, notar que los  $S_i$  condicionados en  $N(t) = n$ , son v.a. i.i.d uniformes entre 0 y  $t$ . Luego:

$$E[e^{\alpha S_i}/N(t) = n] = n \int_0^t \frac{e^{\alpha x}}{t} dx = \frac{n}{\alpha t} (e^{\alpha t} - 1)$$

Entonces:

$$\begin{aligned} E[G(t)/N(t) = n] &= G_0 e^{-\alpha t} + \frac{N(t)}{\alpha t} E[G] e^{-\alpha t} (e^{\alpha t} - 1) \\ &= G_0 e^{-\alpha t} + \frac{N(t)}{\alpha \gamma t} (1 - e^{-\alpha t}) \end{aligned}$$

Por último, tomamos esperanza descondicionando a  $N(t)$ :

$$E[G(t)] = G_0 e^{-\alpha t} + \frac{\mu}{\alpha \gamma} (1 - e^{-\alpha t})$$

Asumiendo que  $\alpha > 0$ , cuando  $t \rightarrow \infty$  se tiene  $E[G(t)] \rightarrow \frac{\mu}{\alpha \gamma}$  (los aportes de cargas de combustible a medida que pasa el tiempo se vuelven más despreciables en términos marginales).

4. Podemos ver al proceso  $M(t)$  como un proceso de Poisson condicional. El tiempo entre llegadas de los asistentes es exponencial de tasa  $n\alpha$  una vez que ya hemos condicionado al número de pilotos inscritos. Con estos argumentos, se obtiene la distribución de  $X_m^t$ :

$$P(X_m^t < x) = \frac{\sum_{n=1}^{\infty} (1 - e^{-n\alpha x}) (n\alpha t)^m (e^{-n\alpha t}) \frac{(\lambda T)^n e^{-\lambda T}}{n!}}{\sum_{n=1}^{\infty} (n\alpha t)^m (e^{-n\alpha t}) \frac{(\lambda T)^n e^{-\lambda T}}{n!}}$$

5. Pensemos primero en un piloto que llega y encuentra  $i$  pilotos en el lugar de las inscripciones,  $i \in \{0, 1, \dots, N-1\}$ . Éste debería esperar las  $(N-i-1)$  que faltan para completar el grupo de  $N$  pilotos y luego el tiempo de

documentación de los  $N$  pilotos. Podemos entonces definir el tiempo que transcurre desde que un piloto que llega y que encuentra  $i$  pilotos hasta que comienza la carrera, como una v.a.  $T_i$  que es la suma de  $(N - i - 1)$  exponenciales de parámetro  $\lambda$  y  $N$  exponenciales de parámetro  $\beta$ . Esto es,  $T_i$  es la suma de una v.a.  $X_i$  de distribución gama  $(N - i - 1, \lambda)$  y una v.a.  $Y_i$  gama  $(N, \beta)$ . Luego:

$$E(T_i) = E(X_i + Y_i) = E(X_i) + E(Y_i) = \frac{N - i - 1}{\lambda} + \frac{N}{\beta}$$

La probabilidad de que un piloto llegue y encuentre a  $i$  pilotos esperando es  $\frac{1}{N}$ . Aunque no era necesario ser tan riguroso para obtenerla, se puede definir un proceso de renovación alternante de forma de que el sistema esté en ON solamente cuando hayan exactamente  $i$  pilotos en el lugar de inscripción (y como si se siguiera contando las llegadas de pilotos luego de que se ha completado el primer grupo de  $N$ ).

$$P[\text{Encontrar } i \text{ pilotos}] = \lim_{t \rightarrow \infty} P[\text{On en } t] = \frac{E[\text{Tiempo ON de un ciclo}]}{E[\text{Largo del ciclo}]}$$

El ciclo dura lo que demoran en llegar  $N$  pilotos. Debería ser claro que:

$$\frac{E[\text{Tiempo ON de un ciclo}]}{E[\text{Largo del ciclo}]} = \begin{cases} \frac{1}{N} & \text{Si } 0 \leq i \leq (N - 1) \\ 0 & \sim \end{cases}$$

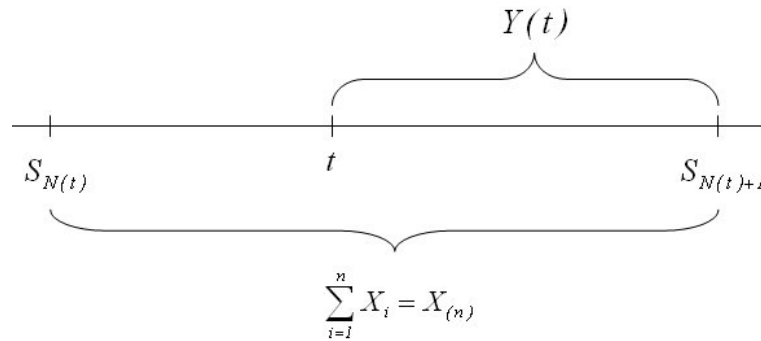
Finalmente, el tiempo esperado  $T_{esp}$  desde que un piloto llega a la inscripción hasta que comienza la carrera es:

$$E(T_{esp}) = \sum_{i=0}^{N-1} \left( \frac{N - i - 1}{\lambda} + \frac{N}{\beta} \right) \frac{1}{N} = \frac{N - 1}{2\lambda} + \frac{N}{\beta}$$

Para efectos de corrección, también se podía argumentar este resultado anterior en términos intuitivos.

## Problema 2

1. Lo que se pide en esta pregunta es calcular el valor esperado de la vida residual de un proceso de renovación en que las renovaciones ocurren cada intervalos  $\sum_{i=1}^n X_i$ . Esta variable se distribuye según el producto de convolución de  $F$   $n$  veces consigo misma. Gráficamente:



$$\sum_{i=1}^n X_i \rightsquigarrow F * F * \dots * F \equiv F_n$$

Se puede calcular la distribución de  $Y(t)$  definiendo el siguiente proceso de renovación alternante:

- **ON:** Las últimas  $x$  unidades del ciclo de renovación.
- **OFF:** El resto del tiempo de cada ciclo de renovación.

$$\begin{aligned}
\lim_{t \rightarrow \infty} P\{Y(t) \leq x\} &= \lim_{t \rightarrow \infty} P\{ON \text{ en } t\} \\
&= \frac{E[\min(X_{(n)}, x)]}{E[X_{(n)}]} \\
&= \frac{\int_0^\infty P\{\min(X_{(n)}, x) < y\} dy}{E[X_{(n)}]} \\
&= \frac{\int_0^x \bar{F}_n(y) dy}{E[X_{(n)}]}
\end{aligned}$$

Utilizando el teorema fundamental del cálculo, se puede obtener la densidad de  $Y(t)$  como:

$$f_{Y(t)}(x) = \frac{d}{dx} \left( \frac{\int_0^x \bar{F}_n(y) dy}{E[X_{(n)}]} \right) = \frac{\bar{F}_n(x)}{E[X_{(n)}]}$$

Así,

$$\begin{aligned}
\lim_{t \rightarrow \infty} E[Y(t)] &= \int_0^\infty y \cdot f_{Y(t)}(y) dy \\
&= \frac{1}{E[X_{(n)}]} \int_0^\infty y \cdot \bar{F}_n(y) dy \\
&= \frac{1}{E[X_{(n)}]} \int_0^\infty \int_y^\infty y \cdot f_n(x) dx \cdot dy \\
&= \frac{1}{E[X_{(n)}]} \int_0^\infty \int_0^x y \cdot f_n(x) dy \cdot dx \\
&= \frac{1}{E[X_{(n)}]} \int_0^\infty \frac{x^2}{2} \cdot f_n(x) dx \\
&= \frac{1}{2 \cdot E[X_{(n)}]} \int_0^\infty x^2 \cdot f_n(x) dx \\
&= \frac{E[X_{(n)}^2]}{2 \cdot E[X_{(n)}]}
\end{aligned}$$

2. Existen dos forma de calcular el precio mínimo de largo plazo que la empresa puede cobrra por cada Kg. de helado.

- **Forma 1:** Consiste en calcular las utilidades de largo plazo por unidad de tiempo en función del precio del helado ( $Z$ ) e imponer que deben ser cero. Definiendo un ciclo como cada vez que la máquina falla, se tiene:

$$\begin{aligned}
\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\sum_{j=1}^{N(t)} U_j}{t} &= \frac{E[U_j]}{E[X_{(n)}]} \\
&= \frac{Z \cdot n \cdot E[R_i] - n \cdot E[X](S_{op} + C_e) - n \cdot C_m - C_R}{n \cdot E[X]} \\
&= 0 \\
\Rightarrow Z &= \frac{C_R + n \cdot (C_m + E[X_i](S_{op} + C_e))}{n \cdot E[R_i]}
\end{aligned}$$

- **Forma 2:** Consiste en calcular directamente el costo en el largo plazo por unidad de helado. Definiendo como un ciclo la producción de  $n$  lotes de helado (es la misma definición de ciclo de la parte anterior), se tiene:

$$\begin{aligned}\lim_{r \rightarrow \infty} Z &= \frac{\sum_{j=1}^{N(r)} C_j}{r} \\ &= \frac{E[C_j]}{n \cdot E[R_i]} \\ &= \frac{C_R + n \cdot (C_m + E[X_i](S_{op} + C_e))}{n \cdot E[R_i]}\end{aligned}$$

3. Se pide calcular la frcción de largo plazo de helado desperdiciado, llamemos  $f_d$  a este valor. Se puede observar que:

$$f_d = 1 - \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{K}{r} \sum_{i=1}^{N(r)} \left\lfloor \frac{R_i}{K} \right\rfloor = 1 - \frac{K \cdot E\left(\left\lfloor \frac{R_i}{K} \right\rfloor\right)}{E[R_i]}$$

Donde  $N(r)$  representa la cantidad de lotes de helado en el momento en que se ha producido un total de  $r$  Kg. de helado. El resultado anterior se obtiene definiendo que cada ciclo comienza (o termina) cuando la máquina produce un lote. La variable  $R_i$  debe interpretarse en este caso como *la cantidad de helado que se produce en un lote*, es decir, cuando se establece el principio y el fin de un lote en una línea de producción continua de helado.  $\left\lfloor \frac{R_i}{K} \right\rfloor$  es una variable aleatoria discreta, que se distribuye de la siguiente forma:

$$P\left(\left\lfloor \frac{R_i}{K} \right\rfloor = j\right) = \int_{Kj}^{K(j+1)} dR(r)$$

Así:

$$E\left(\left\lfloor \frac{R_i}{K} \right\rfloor\right) = \sum_{j=0}^{\infty} j \int_{Kj}^{K(j+1)} dR(r)$$

$$f_d = 1 - \frac{K}{E[R_i]} \sum_{j=0}^{\infty} j \int_{Kj}^{K(j+1)} dR(r)$$

4. Definiendo:

$$A_n = \begin{cases} 1 & \text{Si en la semana } n \text{ hay 2 ó más paletas malas.} \\ 0 & \sim \end{cases}$$

$$N = \inf\{j/A_j = 1\}$$

$D_n$ : Dinero gastado en helados la semana  $n$  (En una semana en que compra helado, *i.e.*  $n \leq N$ ).

Nótese que  $N$  efectivamente es un tiempo de parada para la variable  $A_n$  luego, también es un tiempo de parada para  $D_n$ . Con estas definiciones, y utilizando la ecuación de Wald, lo que se pide calcular es:

$$E\left[\sum_{i=1}^N D_i\right] = E[N]E[D_i]$$

Definiendo  $q_{2+}(i)$  como la probabilidad de que en una caja de  $i$  paletas, 2 ó más salgan defectuosas y  $P_{2+}$  como la probabilidad de que en una semana salgan 2 ó más paletas malas, se tiene:

$$q_{2+,i} = \sum_{j=2}^i \binom{i}{j} q^j (1-q)^{i-j}$$

$$P_{2+} = q_{2+,3} \frac{V_3}{V_3 + V_5} + q_{2+,5} \frac{V_5}{V_3 + V_5} = \frac{q_{2+,3} V_3 + q_{2+,5} V_5}{V_3 + V_5}$$

La distribución de  $N$  es una geométrica con probabilidad de éxito (o salida)  $P_{2+}$ , por lo que:

$$E[N] = \sum_{j=1}^{\infty} j(1 - P_{2+})^{j-1} P_{2+} = \frac{1}{P_{2+}} = \frac{V_3 + V_5}{q_{2+,3}V_3 + q_{2+,5}V_5}$$

$$E[D_i] = V_3 \frac{V_3}{V_3 + V_5} + V_5 \frac{V_5}{V_3 + V_5} = \frac{V_3^2 + V_5^2}{V_3 + V_5}$$

$$E \left[ \sum_{i=1}^N D_i \right] = E[N]E[D_i] = \frac{V_3^2 + V_5^2}{q_{2+,3}V_3 + q_{2+,5}V_5}$$

5. Es importante notar que, con probabilidad 1, la empresa deberá pagar alguna vez la multa a sus clientes. Si  $C_n$  es el costo de producción de las paleta que un cliente consume en la semana  $n$ , el valor de un cliente para la empresa ( $V$ ) se puede expresar como:

$$E[V] = E \left[ \sum_{i=1}^N D_i \right] - E \left[ \sum_{i=1}^N C_i \right] - I$$

El primer y tercer término de la expresión anterior son conocidos, mientras que el segundo se puede calcular utilizando la ecuación de Wald:

$$E \left[ \sum_{i=1}^N C_i \right] = E[N]E[C_i]$$

$$E[C_i] = E[\text{Número de paletas compradas en una semana}] \cdot Z \frac{K}{1 - f_d}$$

$$E[\text{Número de paletas compradas en una semana}] = \frac{5V_5 + 3V_3}{V_5 + V_3}$$

Notar que el valor de una paleta está dado por la cantidad de Kg. fabricados para producir esa paleta (peso de la paleta dividido por la fracción de helado aprovechado) multiplicado por el precio por Kg. del helado.

6. Según las definiciones de la parte 4, la probabilidad de obtener una calificación negativa es:

$$P_{(-)} = q_{2+,8}$$

Definiendo que ocurre una renovación en el instante en que se se obtienen  $i$  calificaciones negativas consecutivas y utilizando el toerema de Blackwell, se tiene que:

$$E[\text{Tiempo entre renovaciones}] = E[\text{Tiempo entre } i - \text{ consecutivos}] = \frac{1}{P_{(-)}^i}$$

Así:

$$\begin{aligned} E[\text{Tiempo hasta } ---] &= E[\text{Tiempo hasta } -] + E[\text{Tiempo entre } ---] \\ &= E[\text{Tiempo hasta } -] + E[\text{Tiempo entre } -] + \frac{1}{P_{(-)}^3} \\ &= E[\text{Tiempo entre } -] + \frac{1}{P_{(-)}^2} + \frac{1}{P_{(-)}^3} \\ &= \frac{1}{P_{(-)}} + \frac{1}{P_{(-)}^2} + \frac{1}{P_{(-)}^3} \end{aligned}$$

Mario Guajardo  
mguajard@ing.uchile.cl

Daniel Yung  
dyung@ing.uchile.cl