



Pauta Control 1

3 de Septiembre, 2004

Problema 1

1. Si un auto lento entra a la autopista en el instante 0, cualquier automóvil rápido que llegue entre 0 y $t = \frac{L}{v_l} - \frac{L}{v_r}$ terminará en la cola del automóvil lento. Esto provisto de que ningún otro auto lento se interponga (y retrase a los autos rápidos por su cuenta). Por lo tanto condicionando sobre el tiempo que transcurre hasta que llega el próximo automóvil lento tenemos que $P(k)$, la probabilidad de terminar con k autos en cola es:

$$\begin{aligned} P(k) &= \int_0^\infty P(k|x_l = s) \cdot e^{-\lambda_l s} \lambda_l ds \\ &= \int_0^{\frac{L}{v_l} - \frac{L}{v_r}} P(k|x_l = s) \cdot e^{-\lambda_l s} \lambda_l ds + \int_{\frac{L}{v_l} - \frac{L}{v_r}}^\infty P(k|x_l = s) \cdot e^{-\lambda_l s} \lambda_l ds \\ &= \int_0^{\frac{L}{v_l} - \frac{L}{v_r}} e^{-(\lambda_r) \cdot s} \cdot [\lambda_r \cdot s]^k \cdot \frac{1}{k!} \cdot e^{-\lambda_l s} \lambda_l ds + e^{-(\lambda_r + \lambda_l) \cdot \left[\frac{L}{v_l} - \frac{L}{v_r} \right]} \cdot \left[\lambda_r \left(\frac{L}{v_l} - \frac{L}{v_r} \right) \right]^k \cdot \frac{1}{k!} \\ &= \frac{\lambda_r^k \cdot \lambda_l}{(\lambda_r + \lambda_l)^{k+1}} \cdot \int_0^{\frac{L}{v_l} - \frac{L}{v_r}} e^{-(\lambda_r + \lambda_l) \cdot s} \cdot [\lambda_r + \lambda_l]^{k+1} \cdot s^k \cdot \frac{1}{k!} ds \\ &\quad + e^{-(\lambda_r + \lambda_l) \cdot \left[\frac{L}{v_l} - \frac{L}{v_r} \right]} \cdot \left[\lambda_r \left(\frac{L}{v_l} - \frac{L}{v_r} \right) \right]^k \cdot \frac{1}{k!} \end{aligned}$$

Seguir desarrollando no lleva a mucho, puesto que los límites de integración no nos dejan obtener una expresión más coherente.

2. Tomamos la expresión anterior y tomamos límite. El integrando de la primera expresión es la densidad de una gamma de parámetros k y $(\lambda_l + \lambda_r)$. Cuando $L \rightarrow \infty$ la integral converge a 1. La segunda expresión tiende a 0 debido al exponente en la exponencial (aplicar L'Hopital k veces). El resultado es el siguiente:

$$P(k) = \frac{\lambda_r^k \cdot \lambda_l}{(\lambda_r + \lambda_l)^{k+1}}$$

Es fácil ver que este mismo resultado se puede obtener simplemente razonando de la siguiente forma: Dado que un auto rápido siempre alcanzará al primer auto lento que este antes que el en la carretera, para que un auto lento termine con k autos rápidos en la cola tienen que entrar exactamente k autos rápidos entre él y el próximo auto lento en entrar, lo que es equivalente a pedir que una exponencial de parámetro λ_r sea menor que una exponencial de parámetro λ_l en k ocasiones consecutivas y después sea mayor.

3. Supongamos que el último automóvil lento entro a la autopista t segundos antes que el automóvil rápido. Esto implica que en el instante s el automóvil lento estará a una distancia $v_l \cdot (t + s)$ de la entrada de la autopista. De la misma forma el automóvil rápido estará a una distancia $v_r \cdot s$. Esto implica que se encontrarán en el instante s^* :

$$s^* \cdot v_r = v_l \cdot (s^* + t) \Rightarrow s^* = \frac{V_l \cdot t}{v_r - v_l}$$

Además, si $s^* > \frac{L}{v_r}$ entonces los autos no se atravesaron.

Vemos entonces que para que se produzca un encuentro el primer requisito es que $t \leq L \cdot (\frac{1}{v_l} - \frac{1}{v_r})$

Entonces, si no se produce un encuentro el tiempo de viaje será $T = \frac{L}{v_r}$. Si se produce un encuentro (y el tiempo en que entro el ultimo automóvil lento es t) el tiempo será $T = \frac{L}{v_l} - t$.

Entonces, descondicionando respecto al tiempo trascurrido desde la entrada del último automóvil lento:

$$\begin{aligned} E[T] &= \int_0^\infty E[T|t] \cdot \lambda_l \cdot e^{-\lambda_l \cdot t} dt \\ &= \int_0^{(\frac{L}{v_l} - \frac{L}{v_r})} \left[\frac{L}{v_l} - t \right] \cdot \lambda_l \cdot e^{-\lambda_l \cdot t} dt + e^{-\lambda_l \cdot (\frac{L}{v_l} - \frac{L}{v_r})} \cdot \frac{L}{v_r} \\ &= \frac{L}{v_l} \cdot (1 - e^{-\lambda_l \cdot (\frac{L}{v_l} - \frac{L}{v_r})}) + \int_0^{(\frac{L}{v_l} - \frac{L}{v_r})} t \cdot \lambda_l \cdot e^{-\lambda_l \cdot t} dt + e^{-\lambda_l \cdot (\frac{L}{v_l} - \frac{L}{v_r})} \cdot \frac{L}{v_r} \\ &= \frac{L}{v_l} \cdot (1 - e^{-\lambda_l \cdot (\frac{L}{v_l} - \frac{L}{v_r})}) - \left(\frac{L}{v_l} - \frac{L}{v_r} \right) \cdot e^{-\lambda_l \cdot (\frac{L}{v_l} - \frac{L}{v_r})} - \frac{1}{\lambda_l} (1 - e^{-\lambda_l \cdot (\frac{L}{v_l} - \frac{L}{v_r})}) + e^{-\lambda_l \cdot (\frac{L}{v_l} - \frac{L}{v_r})} \cdot \frac{L}{v_r} \\ &= \frac{L}{v_l} - \frac{1}{\lambda_l} (1 - e^{-\lambda_l \cdot (\frac{L}{v_l} - \frac{L}{v_r})}) \end{aligned}$$

4. Dado que en $\frac{K}{v_r}$ unidades de tiempo solo han ocurrido una llegada de auto tipo rápido y una de auto tipo lento, cada uno de los tiempo de llegada se distribuye uniforme entre 0 y $\frac{K}{v_r}$. Entonces:

Así, si un auto lento entra primero, con probabilidad 1 llegará primero. Por lo tanto la probabilidad buscada es $\frac{1}{2}$. Si no sabemos el tipo entonces el resultado es la probabilidad que el primero en entrar sea tipo lento:

$$\frac{\lambda_l}{\lambda_l + \lambda_r}$$

Problema 2

1. Cada cliente llega interesado en el producto tipo i con probabilidad q_i . Para que un cliente que llega interesado en el producto Tipo i de precio P_i , lo demande efectivamente se debe tener que la disposición a pagar por dicho producto d_i sea mayor o igual al precio del producto. Luego la probabilidad de demandar es: $P[d_i \geq P_i] = 1 - P[d_i < P_i] = 1 - F_i(P_i) = \bar{F}_i(P_i)$. El proceso de demanda del producto Tipo i también es un Proceso de Poisson.

Dada una probabilidad de demanda para el producto Tipo i igual a: $\bar{q}_i = q_i \bar{F}_i(P_i)$, se tiene que la llegada de clientes que demandan efectivamente un producto Tipo i sigue un proceso de poisson

de tasa: $\lambda_i = \lambda \bar{q}_i$ entonces la distribución de probabilidades de la demanda efectiva por cada producto es:

$$P[N_i(t) = k] = \frac{(\lambda_i t)^k e^{-\lambda_i t}}{k!}$$

2. Si inicialmente los inventarios de productos son Q_A y Q_B , respectivamente:

- a) Denotando por p_k a la probabilidad de que se vendan exactamente k productos tipo B , antes de que se agoten los productos tipo A es:

$$p_k = \binom{Q_A - 1 + k}{Q_A - 1} \frac{\lambda_A}{\lambda_A + \lambda_B}^{Q_A - 1} \frac{\lambda_B}{\lambda_A + \lambda_B} \frac{\lambda_A}{\lambda_A + \lambda_B}$$

- b) Descondicionando lo anterior por sobre los valores de k , se tiene que:

$$r_{AB} = \sum_{k=0}^{Q_B - 1} p_k = \sum_{k=0}^{Q_B - 1} \binom{Q_A - 1 + k}{Q_A - 1} \frac{\lambda_A}{\lambda_A + \lambda_B}^{Q_A - 1} \frac{\lambda_B}{\lambda_A + \lambda_B} \frac{\lambda_A}{\lambda_A + \lambda_B}$$

3. Del resultado visto en auxiliar sabemos que:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{E[R(t)]}{t} = \frac{E[R]}{E[X]}$$

Luego se debe definir el ciclo, y calcular la esperanza de los beneficios por ciclo y el largo esperado de cada ciclo.

Definiendo cada ciclo de renovación, como cada vez que se acepta una nueva orden, se tiene que:

$$E[R] = P_A * Q_A + P_B * Q_B - K - \left[\frac{h_A}{\lambda_A} \sum_{k=1}^{Q_A} k + \frac{h_B}{\lambda_B} \sum_{k=1}^{Q_B} k \right]$$

Donde los dos primeros términos corresponden a los ingresos por ventas, el tercer término es el costo de aceptar la orden y el último corresponde al costo de inventario por unidad de tiempo.

Por otro lado para el largo del ciclo se tiene que:

$$E[L] = \frac{Q_A}{\lambda_A} (1 - r_{AB}) + \frac{Q_B}{\lambda_B} (r_{AB}) + \frac{1}{\mu}$$

Los dos primeros términos corresponden a la esperanza del tiempo hasta que se acaban todos los productos, donde $\frac{Q_i}{\lambda_i}$, representan las esperanzas de las llegadas Q_i -ésima para cada producto, esto es la esperanza de distribuciones gamma(Q_i, λ_i). El tercer término corresponde a la esperanza del tiempo desde que se acaba el último producto hasta que llega la orden que se aceptará, es decir, la esperanza de una exponencial de parámetro μ .

Finalmente se tiene que:

4. En este caso, se utiliza la misma expresión de la parte anterior, pero con distinta estructura de ciclos y beneficios. Luego se tiene que en este caso la función de beneficios está compuesta por la demanda insatisfecha en cada ciclo:

$$E[R] = \frac{E[\text{Demanda después de venta } Q_i\text{-ésima}]}{E[\text{Demanda total del ciclo}]} = \frac{\frac{\lambda_A}{\mu}}{Q_A + \frac{\lambda_A}{\mu}}$$

El numerador corresponde a la esperanza de la cantidad de clientes que llegan a la tienda después de que se acaba el inventario y antes de que llegue el proveedor. En el denominador, se suma a la cantidad anterior el resto de la demanda del ciclo.

Por otro lado la esperanza del largo del ciclo está dado por:

$$E[L] = \frac{Q_A}{\lambda_A} + \frac{1}{\mu}$$

Donde el primer término corresponde al tiempo transcurrido hasta que se agotan los productos y el segundo hasta que llega el proveedor con una nueva entrega.

Denis Sauré
dsaure@dii.uchile.cl

Patricio Hernández
shernand@ing.uchile.cl