



Control 1

3 de Septiembre, 2004

Problema 1

Suponga que autos de dos tipos (rápidos y lentos) entran a una carretera de una sola vía de acuerdo a procesos de Poisson de tasas λ_r y λ_l respectivamente. El largo de la autopista es L un automóvil rápido viajará a una velocidad constante v_r y un automóvil lento a una velocidad v_l ($v_r > v_l$).

Cuando un automóvil rápido se encuentra con uno lento no lo puede sobrepasar y se ve forzado a disminuir su velocidad. Suponga que el largo de cada vehículo es despreciable.

1. (1,5 pts.) ¿Cual es la probabilidad de que un auto lento llegue al final de la autopista con k autos rápidos en cola?
2. (1,0 pts.) ¿Cual es la probabilidad de que un auto lento llegue al final de la autopista con k autos rápidos en cola si la autopista es muy, muy largo?(es decir $L \rightarrow \infty$)
3. (2,5 pts.) Muestre que el tiempo esperado de viaje de un automóvil rápido es igual a la siguiente expresión:

$$\frac{L}{v_l} - \frac{1}{\lambda_l} \left[1 - \exp^{-\lambda_l \left(\frac{L}{v_l} - \frac{L}{v_r} \right)} \right]$$

Hint: exprese el tiempo de viaje de un auto rápido en términos del tiempo transcurrido desde que el último automóvil lento entro a la autopista.

Suponga ahora que usted se encuentra viajando por la carretera rápida y a una distancia K su automóvil sufre un desperfecto mecánico que lo imposibilita para continuar. Al llamar a la asistencia de carretera se le indica que desde que usted ingreso a la carretera tan solo ha ingresado un automóvil lento y un automóvil rápido.

4. (1,0 pts.) ¿Cual es la probabilidad de que el próximo auto que venga por la carretera (a quien usted pedirá ayuda) sea el automóvil lento?.

Problema 2

A una tienda comercial llegan clientes según un proceso Poisson de tasa λ [clientes/u.t]. La tienda ofrece dos productos: Tipo A y Tipo B. Cada uno de los clientes que llega a la tienda está interesado en un determinado tipo de productos. Específicamente, un cliente cualquiera está interesado en el producto Tipo A con probabilidad q_A y en el producto Tipo B con probabilidad q_B (observe que $q_A + q_B = 1$). Los clientes llegan sin conocer de antemano cuál es el precio del producto correspondiente. Además, cada cliente compra, a lo más, una unidad del producto que desea.

Los clientes son heterogéneos en el sentido que su disposición a pagar por el producto es distinta. Entendemos por disposición a pagar la mayor cantidad de dinero que el cliente estaría dispuesto a pagar por el producto. Desde el punto de vista de la tienda la disposición a pagar d_i de un cliente cualquiera interesado en el producto i es una variable aleatoria con función de densidad $f_i(d_i)$ continua en $[0, \infty)$ y función de distribución $F_i(d_i)$ conocidas. Un cliente compra el producto si su disposición a pagar es mayor o igual que el precio al que la tienda lo vende, siempre que la tienda tenga productos en inventario; en caso contrario se va sin comprar.

El proveedor de la tienda, visita el local a intervalos de tiempo aleatorios que siguen una distribución exponencial de parámetro μ . En cada visita el proveedor ofrece una cantidad Q_A de productos tipo A y Q_B de productos tipo B, y la política del dueño de la tienda es aceptar la entrega sólo en el caso que no tenga inventario de ninguno de los dos productos.

El costo de cada entrega aceptada es de K [u.m]. Además el costo el costo unitario por unidad de tiempo de mantener inventario es de h_i [u.m], con $i = 1, 2$ respectivamente. Por último, suponga que los precios unitarios de venta por cada producto son P_A y P_B , respectivamente.

1. (0,5 ptos.) ¿Cuál es la distribución de probabilidades de la demanda efectiva por cada producto?. La demanda efectiva está compuesta por los clientes interesados en un producto y con la disposición a pagar suficiente para comprarlo.
2. (1,5 ptos.) Si inicialmente los inventarios de productos son Q_A y Q_B , respectivamente:
 - a) ¿Cuál es la probabilidad de que se vendan exactamente k productos tipo B, antes de que se agoten los productos tipo A?.
 - b) En función de lo anterior. ¿Cuál es la probabilidad de que los productos tipo A se agoten antes que los productos tipo B?. Denote a esta probabilidad r_{AB}
3. (2,0 ptos.) Considere el comportamiento del sistema descrito en el largo plazo ¿Cuál es el beneficio esperado por unidad de tiempo percibido por la tienda?
4. (2,0 ptos.) Considere que el dueño de la tienda ha decidido dejar de comercializar el producto tipo B. Por este motivo ahora al local, llegarán sólo clientes interesados en el producto tipo A. Por otro lado, el proveedor mantendrá su política de visitas, pero ofrecerá sólo la cantidad de productos Q_A . Bajo esta nueva situación, en el largo plazo ¿Cuál es la fracción esperada de demanda insatisfecha de productos tipo A por unidad de tiempo?