



## CONTROL 1

### 6 de Septiembre de 2006

#### Problema 1

Considere un teatro que exhibe shows cada cierto tiempo.

1. (1,5 pts.) Las entradas para un show se venden en precio de preventa hasta un instante  $t_P$  e inmediatamente después de eso, se venden a precio normal durante las  $t_N$  unidades de tiempo restantes hasta que comienza el show. El proceso de llegada de clientes que acuden a comprar entradas para el evento depende de si se está en preventa o no: durante el período de preventa, se comporta como un proceso de Poisson de función de intensidad  $\lambda(t) = \lambda + bt$ , mientras que durante el período normal se comporta como un proceso de Poisson homogéneo de tasa  $\lambda$ , ( $\lambda, b > 0$ ).

El teatro cuenta con  $M$  filas. Cada cliente demanda sólo una entrada. La probabilidad de que un cliente demande una entrada para ubicarse en la fila  $i$  es  $p_i$ , ( $\sum_{i=1}^M p_i = 1$ ). El número de asientos en la fila  $i$  es  $C_i$ . Si un cliente no encuentra entrada disponible para la fila deseada (debido a problemas de capacidad), decide no comprar y se pierde el show.

Para un show dado, diremos que la fila  $i$  del teatro ( $1 \leq i \leq M$ ) es *problemática* si hasta el instante que comienza el show el número total de entradas vendidas es inferior al 90% de su capacidad o si al menos  $\alpha_i$  clientes que quisieron entrar a esa fila no pudieron conseguir entrada. Sea  $NF$  el número de filas problemáticas una vez comenzado el show. Calcule la esperanza de  $NF$ .

Suponga ahora que  $b = 0$  (i.e., no existe distinción entre los períodos de venta), que la capacidad de todas las filas es *infinita* y que los shows se realizan cada intervalos de largo fijo  $T$ , tiempo durante el cual se venden las entradas para el show respectivo.

Existe un único cajero para atención de clientes, pero que abandona sus funciones durante  $r$  unidades de tiempo cada vez que decide salir a comer. El tiempo que transcurre entre que el cajero vuelve a trabajar y decide salir a comer es una v.a. exponencial de media  $\mu$ . Cuando un cliente llega en busca de una entrada y el cajero no está atendiendo, se retira indignado y el teatro sufre un costo de imagen que equivale a  $\$K_{img}$ . De lo contrario, el cliente comprará una entrada para la fila  $i$  que desea, a precio  $\$S_i$  (el tiempo de la transacción es despreciable). El administrador del teatro paga al cajero  $\$W$  por unidad de tiempo (independiente de si está o no trabajando). Además, por cada show realizado se incurre en un costo operacional  $\$K_{op}T^2$  y se recibe una subvención estatal de  $\$K_{sub}$ .

2. (1,2 pts.) Encuentre el tiempo entre shows que maximiza la utilidad esperada del teatro en el largo plazo.
3. Suponga ahora que  $T$  es una v.a. aleatoria exponencial de parámetro  $\beta$ . La prestigiosa revista *Panorámicos* publica un artículo sobre cada show y lo califica con puntaje  $j$  ( $j \in \{0, 1, \dots, 5\}$ ) con probabilidad  $q_j$ , ( $\sum_{j=0}^5 q_j = 1$ ).

Diremos que el teatro pasa a ser *Premium(1)* luego de su segunda calificación con 5 puntos en la revista y, en general, diremos que el teatro pasa a ser categoría *Premium(k+1)* luego de la segunda calificación con 5 puntos recibida después de ser *Premium(k)*,  $\forall k \geq 0$ .

- a) (0,3 pts.) Un amigo del administrador le comenta: “Alguna vez tu teatro será *Premium(61)*”. ¿Tiene razón el amigo? ¿Se necesita alguna condición sobre los parámetros del problema? Justifique claramente su respuesta.
- b) (1,5 pts.) El administrador lleva un contador con el puntaje acumulado de las calificaciones que *Panorámicos* ha hecho de los shows del teatro. Para  $k \geq 1$ , calcule el puntaje acumulado esperado hasta (inmediatamente después) que el teatro pasa a ser *Premium(k)*.
- c) (1,5 pts.) Se define la v.a.  $K_t$  que toma el valor  $k$  si el teatro está en categoría *Premium(k)* en el instante  $t$ . Para  $t > t_0$ , calcule la esperanza de  $K_t$  si se sabe que en  $t_0$  el teatro aún no alcanza la categoría *Premium(1)*.

## Problema 2

Un museo de arte ofrece a sus visitantes sólo tours guiados. La modalidad es tal que cada vez que se juntan  $V$  visitantes en la recepción, se inicia un tour por el museo con esas personas lideradas por un guía (el museo cuenta con un número *ilimitado* de guías). Un tour dura un tiempo exponencialmente distribuido de media  $\frac{\tau}{\tau-1}[\text{horas}]$ ,  $\tau > 1$ .

Los visitantes llegan al museo de acuerdo a un proceso de Poisson de tasa  $\lambda_i = \frac{1}{\tau^{i+1}}[\text{visitantes/hora}]$  en que  $i$  es el número de personas esperando en la recepción para iniciar su visita guiada. Cada visitante paga una entrada de valor  $E[\$]$ , mientras que el museo le paga a los guías  $G[\$/\text{hora}]$  sólo durante el tiempo que transcurre desde que llega la primera persona de su grupo hasta que el grupo termina la visita.

1. (1,0 pto.) ¿Cuál debe ser el mínimo valor de la entrada para que las visitas guiadas sean rentables para el museo en el largo plazo? Llame a este valor  $E_0$ .

El gobierno ha prestado al museo un famoso cuadro, avaluado en  $N[\$]$ . Se sabe que con probabilidad  $p_c$ , un visitante es una persona *amante del arte*, mientras que con probabilidad  $p_v = 1 - p_c$  se trata de un potencial *vándalo* que, con probabilidad  $q$  tiene *malas intenciones*. Si en un grupo hay más de  $L$  vándalos con malas intenciones ( $L < V$ ), se robarán el cuadro. Si éste es robado, el museo deberá cerrar y pagar al gobierno el valor del cuadro.

2. (0,5 pts.) ¿Cuál es la probabilidad de que el famoso cuadro sea robado durante la visita de un grupo?
3. (1,0 pto.) Si el valor de la entrada es  $E > E_0$  ¿Cuál es la utilidad total esperada que representan para el museo las visitas guiadas durante la exhibición del famoso cuadro?

Finalmente, el cuadro ha sido robado y la policía lo ha encontrado en una bóveda de seguridad en la casa del coleccionista *Tommy Corona*. La bóveda tiene 3 botones ( $A, B, C$ ) y se abre cuando se presionan en la secuencia  $ABCBACCABCA$ , desconocida para los detectives. Si se presiona una secuencia de largo mayor que  $M$  antes de abrir la bóveda, ésta explota (junto con el cuadro), por lo que no habrían pruebas para culpar a *Tommy Corona*. Si la policía logra abrir la bóveda encontrará el cuadro y *Tommy* será enviado a prisión.

El detective encargado ha decidido presionar los botones aleatoriamente hasta que la bóveda se abra o explote, suponiendo que el largo esperado de la secuencia que presionará para abrir la bóveda es menor o igual que  $M$ .

4. (1,0 pto.) Si cada vez que el detective presiona un botón elige el botón  $i$  con probabilidad  $p_i$ ,  $i \in \{A, B, C\}$  y  $1 \ll M < \frac{2}{p_a p_b p_c}$  ¿Es correcta la suposición del detective?

Suponga que el detective ha logrado abrir la bóveda recuperando el cuadro y encarcelando a *Tommy*, por lo que el museo vuelve a abrir sus puertas al público. Considere que ahora sólo llegan amantes del arte, según un proceso de Poisson de tasa  $\lambda[\text{personas/hora}]$  y que las visitas ya no se desarrollan en grupos de  $V$  personas, sino que se inicia un recorrido (con un guía) cada  $H[\text{horas}]$  con todos los visitantes que hayan llegado después de la salida del último tour. Cada tour dura un tiempo de distribución uniforme de parámetros  $(H, 2H)$ . El museo cuenta con sólo 2 guías. Los visitantes esperan por su tour en la cafetería del museo, que es atendida por una cajera. Se sabe que un visitante que espera más de  $H/3[\text{horas}]$  consume con seguridad un refresco y con probabilidad  $s/H$  consume un sandwich, donde  $s$  es el tiempo que esa persona debe esperar para que comience el tour. Quienes deben esperar menos de  $H/3[\text{horas}]$  sólo consumen un paquete de golosinas con probabilidad  $p_g$ .

Un refresco produce una utilidad de  $R[\$]$ , un sandwich produce una utilidad de  $S[\$]$  y un paquete de golosinas produce  $GO[\$]$  de utilidad. La entrada cuesta  $E[\$]$  y el museo paga a cada guía  $SG[\$/\text{hora}]$  (independiente de si se encuentra trabajando o no) y a la cajera le paga  $SC[\$/\text{hora}]$  además del 10 % de las utilidades de la cafetería (el resto de éstas es para el museo).

5. (1,5 pts.) Entregue una cota superior para  $H$ , suponiendo que con el nuevo sistema el máximo tiempo de espera posible de un visitante es menor que la esperanza del tiempo de espera que una persona cualquiera tendría operando con el sistema de grupos de  $V$  personas.
6. (1,0 pto.) Bajo esta modalidad de operación, ¿Cuál es la utilidad esperada del museo por unidad de tiempo en el largo plazo?