

Clase Auxiliar 3

20 DE AGOSTO DE 2008

P1 Sea $\{N_1(t), t > 0\}$ un proceso de Poisson de tasa λ_1 . Las llegadas de este proceso se colocan en *ON* o en *OFF* debido a un switch activado y desactivado por las llegadas de un segundo proceso de Poisson, $\{N_2(t), t > 0\}$, independiente, de tasa λ_2 . Sea $\{N_a(t), t > 0\}$ el proceso resultante de contar los arribos de $\{N_1(t), t > 0\}$ cuando se está en *ON*, es decir, cuando $N_2(t)$ es par. El sistema comienza en *ON*.

- Encuentre la distribución del número de eventos de $N_1(t)$ registrados durante el k -ésimo período en que el switch esta en *ON*.
- Dado que la primera llegada del segundo proceso ocurrió en τ , encuentre la distribución condicional de $N_1(\tau)$.
- Dado que el número de llegadas de $N_1(t)$ hasta la primera llegada de $N_2(t)$ es n , encuentre la densidad del instante de la primera llegada de $N_2(t)$.
- Sea X_a el tiempo entre arribos del proceso $N_a(t)$, calcule $E(X_a)$.

Sol: a) Por la propiedad de renovación del proceso de Poisson, basta calcular esa probabilidad en el primer período en que el switch está en *ON*, pues estar en el instante de inicio de un período *ON* es como estar en el instante inicial (recuerde que se parte en *ON*).

Considere el proceso combinado $\{N(t) = N_1(t) + N_2(t); t \geq 0\}$. Por lo visto en las clases anteriores, una llegada de $N(t)$ pertenece a $N_i(t)$ con probabilidad $\frac{\lambda_i}{\lambda_1 + \lambda_2}$, $i = 1, 2$, independiente del tiempo de ocurrencia.

Queremos calcular la probabilidad que hayan n llegadas de $N_1(t)$ en el intervalo de tiempo hasta la próxima llegada de $N_2(t)$. Para que esto pase deben haber n llegadas consecutivas del proceso combinado que pertenezcan a $N_1(t)$ y luego una que pertenezca al proceso $N_2(t)$. En otras palabras se tiene que dar que la llegada del primer proceso le “gane” a la del segundo exactamente n veces y que luego “pierda”.

Por la propiedad de pérdida de memoria (renovación del Proceso en cualquier instante), esta probabilidad se puede calcular como:

$$P[N_1 = n, \text{ en ciclo } ON] = \left(\frac{\lambda_1}{\lambda_1 + \lambda_2} \right)^n \cdot \frac{\lambda_2}{\lambda_1 + \lambda_2}$$

Otra forma es calcular $P[N_1(X_1^{(2)}) = n]$, donde $X_1^{(2)}$ es la primera llegada del proceso $N_2(t)$.

Se hace condicionando en $X_1^{(2)} = s$. El desarrollo es como siempre, salvo que aparece una integral del tipo

$$I_n = \int_0^\infty s^n e^{-\lambda s} ds$$

Que se calcula por integración por partes de la siguiente manera:

$$\int_0^\infty u dv = uv|_0^\infty - \int_0^\infty v du^1$$

¹Folklóricamente conocida como “Un día vi una vaca vestida de uniforme”.

con $u = s^n$, $dv = e^{\lambda s}$. Obteniéndose:

$$I_n = \frac{n}{\lambda} I_{n-1}$$

Y con $I_0 = \frac{1}{\lambda}$, que es fácil de calcular.

Por razonamiento inductivo, ie, reemplazando $I_{n-1} = \frac{n}{\lambda} I_{n-2}, \dots$, etc, se concluye

$$I_n = \frac{n!}{\lambda^{n+1}}$$

Y reemplazando esto en la expresión que se obtiene al desarrollar el condicionamiento de $P[N_1(X_1^{(2)}) = n]$, se obtiene la misma probabilidad de antes.

b) Simplemente buscamos la distribución del número de llegadas de $N_1(t)$ en $[0, \tau]$:

Es decir, $P[N_1(X_1^{(2)}) = n | X_1^{(2)} = \tau]$. Por independencia:

$$P[N_1(X_1^{(2)}) = n | X_1^{(2)} = \tau] = P[N_1(\tau) = n | X_1^{(2)} = \tau] = P[N_1(t) = n] = \frac{e^{-\lambda\tau}(\lambda\tau)^n}{n!}$$

c) Sea $R = n$ llegadas en primer periodo ON , y $\tau =$ tiempo de término del primer periodo ON . Entonces buscamos:

$$\begin{aligned} f_{\tau|R}(t|R)dt &= P[t \leq \tau \leq t + dt | R] \\ &= \frac{P[R | t \leq \tau \leq t + dt] \cdot P[t \leq \tau \leq t + dt]}{P[R]} \end{aligned}$$

Pero de las partes anteriores y de la distribución exponencial del tiempo entre arribos del segundo proceso se tendra que:

$$\begin{aligned} f_{\tau|R}(t|R)dt &= \frac{\frac{(\lambda_1 t)^n e^{-\lambda_1 t}}{n!} \cdot \lambda_2 e^{-\lambda_2 t}}{\left(\frac{\lambda_1}{\lambda_1 + \lambda_2}\right)^n \cdot \frac{\lambda_2}{\lambda_1 + \lambda_2}} dt \\ &= \frac{e^{-(\lambda_1 + \lambda_2)t} \cdot (\lambda_1 + \lambda_2)^{n+1} t^n}{n!} dt \end{aligned}$$

Es decir se distribuye de acuerdo a una $gamma(n+1, \lambda_1 + \lambda_2)$

d) Condicionaremos sobre la primera llegada del proceso combinado $N(t) = N_1(t) + N_2(t)$.

$$\begin{aligned} E[X_a] &= E[X_a | N_1(t) \text{ primero}] \cdot P[N_1(t) \text{ primero}] + E[X_a | N_2(t) \text{ primero}] \cdot P[N_2(t) \text{ primero}] \\ &= \frac{1}{\lambda_1} \cdot \frac{\lambda_1}{\lambda_1 + \lambda_2} + \left[\frac{2}{\lambda_2} + E[X_a] \right] \cdot \frac{\lambda_2}{\lambda_1 + \lambda_2} \end{aligned}$$

Los términos de la forma $\frac{1}{\lambda_i}$ se explican como el tiempo de espera a la llegada de los procesos $N_i(t)$, con $i = 1, 2$. El $E[X_a]$ que aparece a la derecha corresponde al tiempo de espera dado que una se encuentra al comienzo de un nuevo período ON .

$$\Rightarrow E[X_a] = \frac{3}{\lambda_1}$$

P2 A una tienda comercial llegan clientes según un proceso Poisson de tasa λ [clientes/semana]. La tienda ofrece dos productos: Tipo A y Tipo B. Cada uno de los clientes que llega a la tienda está interesado en un determinado tipo de productos. Específicamente, un cliente cualquiera está interesado en el producto Tipo A con probabilidad q_A y en el producto Tipo B con probabilidad q_B (observe que $q_A + q_B = 1$). Los clientes llegan sin conocer de antemano cuál es el precio del producto correspondiente. Además, cada cliente compra, a lo más, una unidad del producto que desea.

Los clientes son heterogéneos en el sentido que su disposición a pagar por el producto es distinta. Entendemos por disposición a pagar la mayor cantidad de dinero que el cliente estaría dispuesto a pagar por el producto. Desde el punto de vista de la tienda la disposición a pagar d_i de un cliente cualquiera interesado en el producto i es una variable aleatoria con función de densidad $f_i(d_i)$ continua en $[0, \infty)$ y función de distribución $F_i(d_i)$ conocidas. Un cliente compra el producto si su disposición a pagar es mayor o igual que el precio al que la tienda lo vende, siempre que la tienda tenga productos en inventario; en caso contrario se va sin comprar. Suponga que la tienda dispone de inventarios iniciales S_A y S_B para cada uno de los productos, y que no es posible reabastecerse en ninguno de las T semanas del horizonte bajo estudio.

Por último, suponga que los precios unitarios a cobrar por cada producto son P_A y P_B , respectivamente.

- Si un cliente llega interesado en el producto Tipo i ¿Cuál es la probabilidad que este cliente esté dispuesto a comprarlo? ¿Cuál es la probabilidad de que el stock del producto i se agote antes del final de la semana t desde el inicio de la temporada ($0 < t < T$)?
- Dado que en las primeras t_1 semanas de la temporada llegaron R clientes a la tienda, con $R > S_A$, responda. ¿Cuál es la probabilidad de que se hayan vendido n productos tipo A?
- Encuentre la función de distribución de probabilidades la cantidad de productos Tipo B que se venden antes de la venta del primer producto Tipo A ¿Cuál es la probabilidad de que se agote el stock de productos Tipo B, antes de que se venda el primer producto Tipo A?
- Calcule la esperanza de la cantidad total de productos en stock al final del horizonte.
- Entregue una expresión para el ingreso esperado por ventas en el horizonte de T semanas bajo estudio.

Sol: En lo que sigue, se usará la siguiente notación:

$$\begin{aligned} N(t) &= \# \text{ total de clientes que llegan hasta } t \\ N_i(t) &= \# \text{ de clientes que llegan hasta } t \text{ interesados en producto } i \text{ con disposición a pagar mayor al precio} \\ \bar{q}_i &= \text{Prob. que un cliente esté interesado en producto tipo } i \text{ y con disposición a pagar mayor al precio.} \end{aligned}$$

- Para que un cliente que llega interesado en el producto Tipo i de precio P_i , lo compre se debe tener que la disposición a pagar por dicho producto d_i sea mayor o igual al precio del producto. Luego la probabilidad pedida es:

$$P[d_i \geq P_i] = 1 - P[d_i < P_i] = 1 - F_i(P_i) = \bar{F}_i(P_i)$$

El proceso de demanda del producto Tipo i también es un Proceso de Poisson. Dada una probabilidad de demanda para el producto Tipo i igual a:

$$\bar{q}_i = q_i \cdot \bar{F}_i(P_i)$$

se tiene que la llegada de clientes que demandan un producto Tipo i sigue un proceso de poisson de tasa:

$$\bar{\lambda}_i = \lambda \cdot \bar{q}_i$$

entonces la probabilidad que $N_i(t)$ sea igual a k , será:

$$P[N_i(t) = k] = \frac{(\bar{\lambda}_i \cdot t)^k e^{-\bar{\lambda}_i \cdot t}}{k!}$$

Luego para que para calcular la probabilidad de que el stock del producto Tipo i se agote antes del final de la semana t se tiene que la demanda debe ser mayor al inventario disponible al principio de la temporada. Es decir:

$$P[N_i(t) \geq S_i] = \sum_{k=S_i}^{\infty} P[N_i(t) = k]$$

- b) Dado que la probabilidad que cada uno de los R clientes que llegaron, independiente de los demás, demanden el producto Tipo A es $\bar{q}_A = q_A \cdot \bar{F}_A(P_A)$, se tiene que:

$$P[N_A(t_1) = n / N(t_1) = R] = \begin{cases} \binom{R}{n} (\bar{q}_A)^n (1 - \bar{q}_A)^{R-n} & \text{si } n < S_A \\ \sum_{k=S_A}^R \binom{R}{k} (\bar{q}_A)^k (1 - \bar{q}_A)^{R-k} & \text{si } n = S_A \\ 0 & \text{si } n > S_A \end{cases}$$

Pues se está calculando la probabilidad pedida como la de cierta cantidad de éxitos o fracasos en una tirada de R monedas, con probabilidad $\bar{q}_A$ de éxito.

- c) Dado que los tiempos entre llegadas de un proceso de Poisson de tasa λ son variables aleatorias que siguen una distribución exponencial de parámetro λ , se tiene que para calcular la probabilidad pedida se deben “hacer competir” las exponenciales que rigen las demandas de ambos productos.

Sea $P[N_B^k]$ la probabilidad que se vendan k productos Tipo B antes del primero Tipo A. Luego se tiene que:

$$P[N_B^k] = \begin{cases} \left(\frac{\bar{\lambda}_B}{\bar{\lambda}_A + \bar{\lambda}_B} \right)^k \cdot \left(\frac{\bar{\lambda}_A}{\bar{\lambda}_A + \bar{\lambda}_B} \right) & \text{si } k < S_B \\ \left(\frac{\bar{\lambda}_B}{\bar{\lambda}_A + \bar{\lambda}_B} \right)^{S_B} & \text{si } k = S_B \\ 0 & \text{si } k > S_B \end{cases}$$

Por otro lado la probabilidad de que se agote el stock de productos Tipo B, antes de que se venda el primer producto Tipo A está dado por:

$$P[\text{Agota B antes de primera venta de A}] = \left(\frac{\bar{\lambda}_B}{\bar{\lambda}_A + \bar{\lambda}_B} \right)^{S_B}$$

- d) La esperanza de la cantidad total de productos en stock al final del horizonte es la suma de la esperanza de los productos en stock de cada tipo en dicho instante. Luego se tiene que:

$$\begin{aligned} E[S^T] &= E[S_A^T] + E[S_B^T] \\ &= \sum_{k=0}^{S_A-1} (S_A - k) \cdot P[N_A(T) = k] + \sum_{k=0}^{S_B-1} (S_B - k) \cdot P[N_B(T) = k] \end{aligned}$$

donde:

$$P[N_i(t) = k] = \frac{(\bar{\lambda}_i \cdot t)^k e^{-\bar{\lambda}_i \cdot t}}{k!}$$

La sumas son hasta $S_i - 1$, pues para $k \geq S - i$ los términos que aparecen son nulos, pues no queda nada en inventario.

e) La esperanza de los ingresos por ventas está dada por:

$$E[\text{Ingresos}] = \sum_{i=A,B} P_i \left[\sum_{k=1}^{S_i-1} i \cdot P[N_i(T) = k] + \sum_{k=S_i}^{\infty} S_i \cdot P[N_i(T) = k] \right]$$

P3 Suponga que clientes llegan a una estación de servicios según un proceso de poisson de tasa λ . A su llegada cada cliente es atendido inmediatamente por uno de los innumerables empleados. Los tiempos de servicio se distribuyen según una distribución $G(t)$. Determine la distribución del número de clientes en el sistema en el instante t .

Sol: Sean

$x(t)$ = Número de clientes en el sistema en el instante t

$N(t)$ = Número de personas que han llegado al sistema hasta t

Notemos que:

$$P(x(t) = j) = \sum_{n=j}^{\infty} P[x(t) = j | N(t) = n] \cdot \frac{e^{-\lambda t} (\lambda t)^n}{n!}$$

Por otro lado, un cliente que llega en un instante s ($0 \leq s \leq t$) tiene una probabilidad de estar en el sistema igual a $1 - G(t - s)$

Y, además, condicional a que $N(t) = n$, el instante de llegada de las n personas se distribuyen $U(0, t)$.

Así, condicionando en el instante de llegada de la persona, tenemos que la probabilidad de que una de estas personas se encuentre en el sistema es:

$$p = \int_0^t \frac{1 - G(t - s)}{t} ds$$

independiente del resto.

Entonces:

$$P[x(t) = j | N(t) = n] = \binom{n}{j} p^j (1 - p)^{n-j}$$

Remplazando en la expresión inicial tenemos que:

$$\begin{aligned} P(x(t) = j) &= \sum_{n=j}^{\infty} \frac{n!}{j!(n-j)!} p^j (1-p)^{n-j} \cdot \frac{e^{-\lambda t} (\lambda t)^n}{n!} \\ &= \frac{e^{-\lambda t \cdot p} (\lambda \cdot t \cdot p)^j}{j!} \cdot \sum_{n=j}^{\infty} \frac{e^{-\lambda t \cdot (1-p)} [\lambda \cdot t \cdot (1-p)]^{(n-j)}}{(n-j)!} \\ &= \frac{e^{-\lambda t \cdot p} (\lambda \cdot t \cdot p)^j}{j!} \end{aligned}$$

Es decir, $x(t) \sim \text{Poisson}(\lambda t p)$.

P4 Los auxiliares del ramo, hinchas acérrimos de **Barrabases**, asisten al estadio a ver al equipo de sus amores. Durante un partido los jugadores hacen goles de acuerdo a un proceso de Poisson de tasa λ . Los auxiliares celebran cada gol durante un tiempo B , lapso de tiempo durante el cual no son capaces de ver lo que sucede en la cancha. Además, tras cada gol, el partido es reiniciado instantáneamente.

- ¿Cuál es la probabilidad de que los auxiliares vean los 3 primeros goles?
- Sea $R(t)$ el número de goles vistos por los auxiliares hasta el instante t . Para $t \geq (n-1)B$, calcule $P[R(t) \geq n]$.

Sol: a) Como la probabilidad de ver el primer gol es 1, para que esto ocurra el tiempo entre cada uno de los 2 últimos goles debe ser superior a B .

Sean

x_i = tiempo entre el gol $(i-1)$ -ésimo y el i -ésimo

Entonces:

$$P(\text{ver los 3 primeros goles}) = P(x_2 > B, x_3 > B) = P(x_2 > B)P(x_3 > B) = (e^{-\lambda B})^2 = e^{-2\lambda B}$$

- Considere la v.a.

S_n = el tiempo en que vemos el n -ésimo gol

Con esta definición la probabilidad que nos piden calcular se puede escribir como

$$P(S_n \leq t) = P(R(t) \geq n)$$

Para hacer el cálculo encontremos la distribución de S_n . Para esto sea

Y_i = el tiempo transcurrido entre el fin de la celebración del $(i-1)$ -ésimo gol observado y el momento en que se produce el i -ésimo gol observado

De esta manera, usando la propiedad de renovación del proceso de Poisson, tenemos que :

$$Y_i \sim \exp(\lambda), \forall i$$

Además, estas v.a. son independientes.

Por otro lado,

$$S_n = \sum_{i=1}^n Y_i + (n-1)B$$

Luego,

$$S_n - (n-1)B \sim \text{Gamma}(n, \lambda)^2$$

En conclusión,

$$P(R(t) \geq n) = \int_0^{t-(n-1)B} \frac{\lambda^n s^{n-1} e^{-\lambda s}}{(n-1)!} ds$$

²Suma de variables exponenciales *i.i.d.*.

- P5 Considere una posta de atención de urgencias médicas donde llegan dos tipos de pacientes: los graves (que deben ser atendidos de inmediato) y los leves (que pueden esperar para ser atendidos). Se sabe que cada uno de estos grupos de pacientes llegan de acuerdo a un proceso de Poisson con tasas 2 y 4 pacientes por hora respectivamente. Además, todos los pacientes graves deben permanecer en observación hasta el día siguiente, momento en el cual son dados de alta o son trasladados a un hospital.

Considere que a las 7:00 a.m. los pacientes graves son evaluados para decidir si son dados de alta o trasladados. Por ello, a las 7:00 todas las camas se desocupan. Los pacientes ingresan las 24 horas al servicio.

Los pacientes leves NO ocupan camas.

- La posta desea determinar el número de camas que debe tener para los pacientes graves, de modo que con probabilidad de por lo menos 0.95 puedan ser atendidos todos los pacientes graves que ingresen y no deban ser derivados a otra posta. Entregue una expresión para determinar este número de camas.
- Se sabe que sólo un paciente grave ingresó entre las 7:00 y 8:00. Ese día el médico llegó 5 minutos atrasado (es decir a las 7:05, ya que su turno comenzaba a las 7:00). ¿Cuál es la probabilidad que dicho paciente haya muerto debido a que no estaba presente el médico? (Asuma que un paciente grave muere si no es atendido de inmediato). Justifique.
- Dado que llegaron 10 pacientes, ¿Cuál es la probabilidad de que los primeros 5 hayan sido graves y los siguientes cinco leves?.
- Para el ingreso de pacientes leves y graves debe llenarse un formulario y entregarse en una ventanilla de atención al paciente. Si la persona que atiende la ventanilla debe ausentarse por unos minutos para ir al baño. ¿Cuánto es el máximo de tiempo que puede hacerlo de modo que la probabilidad de que llegue un paciente durante su ausencia sea menor que 5%?.

So1: a) Supongamos que se decide colocar N camas en el hospital. Además consideremos que el día comienza en $t = 0$ (7:00 am) y termina en $t = T$ (7:00am del día siguiente) De esta forma, la probabilidad de atender a todos los pacientes graves será:

$$P_N[\text{Lleguen a lo más } N \text{ pacientes graves}] = \sum_{i=0}^N \frac{(\lambda_1 T)^i e^{-\lambda_1 T}}{i!}$$

Donde λ_1 es la tasa de llegada de los pacientes graves (2 al día). Entonces buscamos un N^* tal que:

$$N^* = \inf \left\{ N \in \{0, 1, \dots\} : \sum_{i=0}^N \frac{(\lambda_1 T)^i e^{-\lambda_1 T}}{i!} \geq 0,95 \right\}$$

- El paciente morirá o no dependiendo del instante en que llego. Si llego antes de las $t = 5$ (desde ahora en adelante trabajaremos en minutos) entonces muere con probabilidad 1 (del enunciado). Si llego después de las $t = 5$ sobrevive. Ahora Supongamos que el tipo llego en el instante X ($0 \leq X \leq 60$) Entonces:

$$P[\text{Muerto} | \text{Llego en } X] = 1_{X \leq 5}$$

Si embargo debemos descondicionar. Para esto vemos que la distribución condicional de las llegadas de Poisson hasta un instante T se distribuyen uniformemente entre 0 y T . Entonces tendremos que:

$$\begin{aligned}
P[\text{Muerto}] &= \int_0^{60} 1_{X \leq 5} \cdot \frac{1}{60} dX \\
&= \int_0^5 1_{X \leq 5} \cdot \frac{1}{60} dX + \int_5^{60} 1_{X \leq 5} \cdot \frac{1}{60} dX \\
&= \int_0^5 \frac{1}{60} dX + \int_5^{60} 0 \cdot \frac{1}{60} dX \\
&= \frac{5}{60} = \frac{1}{12}
\end{aligned}$$

- c) Esto es básicamente es la probabilidad que lleguen 5 pacientes graves seguidos de 5 pacientes leves. Sin embargo dado que:

$$P[\text{Llegue un paciente grave antes que uno leve}] = \frac{\lambda_g}{\lambda_g + \lambda_l}$$

donde λ_l es la tasa de llegada de pacientes leves al consultorio, y considerando la propiedad de perdida de memoria de la distribución exponencial, tendremos que la probabilidad que busquemos es:

$$\left(\frac{\lambda_g}{\lambda_g + \lambda_l} \right)^5 \cdot \left(\frac{\lambda_l}{\lambda_g + \lambda_l} \right)^5$$

- d) Por la perdida de memoria de la exponencial el mundo “comienza” cuando el tipo inicia su ida al baño. Por otro lado, debido a la suma de procesos de Poisson, el proceso de llegada de pacientes al consultorio será en si un proceso de poisson de tasa $\lambda_g + \lambda_l$, y por lo tanto Y = el tiempo de llegada entre clientes, seguirá una distribución exponencial de parámetro $\lambda_g + \lambda_l$. Entonces el tiempo máximo, T^* , de demora debe ser tal que :

$$P[Y \geq T^*] = e^{-(\lambda_g + \lambda_l) \cdot T^*} = 0,95$$

Entonces:

$$T^* = -\frac{\ln(0,95)}{\lambda_g + \lambda_l}$$

P6 Considere una sala de cine con capacidad para 200 personas. La entrada a la función es de p [\$] por persona. Sin embargo, si el cliente es “socio” del cine se le hace un 20 % de descuento.

Asuma que las personas llegan al cine de acuerdo a un proceso de Poisson a comprar las entradas y que cada persona compra sólo una entrada. Las entradas para la función de las 22:00 horas comienzan a venderse durante el mismo día desde las 16:00 horas, y la boletería se cierra a las 22:00.

Las tasa de llegada es de 40 personas/hora, y cada una persona posee tarjeta de socio con una probabilidad de un 25 %.

- Si usted sabe que se vendieron n entradas ¿Cuál es la probabilidad de que i entradas se hayan vendido a “socios” del cine?.
- ¿Cuál es la probabilidad de que se vendan n entradas ($n \in \{0, 1, 2, \dots\}$)?.
- ¿Cuál es la utilidad esperada por función?.

So1: El problema puede ser visto como una división de un proceso de Poisson. Sean:

$N(t)$ = número de personas que han llegado a comprar entradas desde 0 hasta t .
 $N_n(t)$ = número de personas que han llegado a comprar entradas sin ser socios desde 0 hasta t .
 $N_m(t)$ = número de personas que han llegado a comprar entradas siendo socios desde 0 hasta t .

a)

$$\begin{aligned}
 P(N_m(6) = i | N(6) = n) &= \frac{P(N_m(6) = i, N(6) = n)}{P(N(6) = n)} \\
 &= \frac{P(N_m(6) = i)P(N_n(6) = n - i)}{P(N(6) = n)} \\
 &= \frac{\frac{(0,25\lambda 6)^i e^{-0,25\lambda 6}}{i!} \frac{(0,75\lambda 6)^{n-i} e^{-0,75\lambda 6}}{(n-i)!}}{\frac{(\lambda 6)^n e^{-\lambda 6}}{n!}} \\
 &= \binom{n}{i} 0,25^i 0,75^{n-i}
 \end{aligned}$$

b) Distinguimos 3 casos:

$$P(\text{vender } n) = \begin{cases} \frac{(\lambda 6)^n e^{-\lambda 6}}{n!} & \text{si } n < 200 \\ \sum_{k=200}^{\infty} \frac{(\lambda 6)^k e^{-\lambda 6}}{k!} & \text{si } n = 200 \\ 0 & \text{si } n > 200 \end{cases}$$

c) Sea u = utilidad de una función. Entonces:

$$E(u) = \sum_{k=0}^{\infty} E(u | N(6) = k) P(N(6) = k)$$

pero además

$$E(u | N(6) = k) = \begin{cases} \sum_{i=1}^k \binom{k}{i} 0,25^i 0,75^{n-i} [(k-i)p + i0,8p] & \text{si } k \leq 199 \\ \sum_{i=1}^k \binom{200}{i} 0,25^i 0,75^{200-i} [(200-i)p + i0,8p] & \text{si } k \geq 200 \end{cases}$$

Finalmente, como $P(N(6) = k) = \frac{(\lambda 6)^k e^{-\lambda 6}}{k!}$, sólo basta reemplazar.