IN780
Segundo Semestre, 2008

Pauta Control 4

Problema 1 (Becker 1974) Suponga que un padre y su hijo juegan el siguiente juego. Primero el hijo realiza una acción A , que genera ingresos para él mismo y el padre de $I_C(A)$ e $I_P(A)$ respectivamente ($I_C(A)$ es el excedente neto para el hijo después de considerar el costo de la acción, por lo que puede ser decreciente para A grande). Después, el padre observa I_C e I_P , y elige una herencia B . La utilidad del hijo es $U(I_C + B)$ y la del padre es $V(I_P - B) + kU(I_C + B)$, con $k > 0$. Asuma que $A \geq 0$ y que las funciones I_C, I_P son estrictamente cóncavas y son maximizadas para $A_C, A_P > 0$. La herencia B puede ser positiva o negativa. Las funciones U y V son estrictamente cóncavas.

- i. (2 puntos) Escriba el juego en forma extensiva.
- ii (4 puntos) Demuestre que en el EPS el nivel A^* escogido por el hijo es el mismo que el nivel que maximiza la utilidad social $I_C(A) + I_P(A)$, a pesar que sólo el padre es altruista.

Respuesta

La estrategia del hijo es la acción A , la estrategia del padre es una función $B(I_h(A), I_p(A))$. Dado esto, para encontrar el SPE hay que ir de atrás hacia adelante. Es decir, primero veamos lo que hace el padre. Dada una acción A , el padre busca el B^* que maximiza su utilidad.

$$\max_b V(I_p - B) + kU(I_h + B)$$

Derivando y igualando a cero, la condición que queda es:

$$V'(I_p - B^*) + kU'(I_h + B^*) = 0$$

La función de reacción B depende implícitamente de $I_h(A)$ y $I_p(A)$, que es lo que observa el padre.

Ahora, para calcular el SPE es necesario ver lo que hace el hijo, el maximiza su utilidad, asumiendo que el padre juega B^* :

$$\max_A U(I_h(A) + B^*(I_h, I_p))$$

Las condiciones de primer orden quedan:

$$U'(I_h + B^*(I_p, I_h))(I'_h + \frac{\partial B^*}{\partial I_h} I'_h + \frac{\partial B^*}{\partial I_p} I'_p) = 0$$

Todo está evaluado en A^* . De la última relación, como $U(\cdot)$ es creciente entonces la derivada es estrictamente mayor que cero. Luego la igualdad que tenemos es:

$$I'_h + \frac{\partial B^*}{\partial I_h} I'_h + \frac{\partial B^*}{\partial I_p} I'_p = 0$$

Ahora veamos la primera ecuación. Si derivamos con respecto a A en esa ecuación, nos queda el siguiente resultado:

$$V''(I_p - B^*)(I'_p - \frac{\partial B^*}{\partial I_h} I'_h - \frac{\partial B^*}{\partial I_p} I'_p) + kU''(I_h + B^*)(I'_h + \frac{\partial B^*}{\partial I_h} I'_h + \frac{\partial B^*}{\partial I_p} I'_p) = 0$$

Evaluando en A^* y aplicando el resultado anterior queda que:

$$V''(I_p(A^*) - B^*(I_p(A^*), I_h(A^*))(I'_p(A^*) + I'_h(A^*)) = 0$$

Y como $V(\cdot)$ es estrictamente concava, queda que:

$$I'_p(A^*) + I'_h(A^*) = 0$$

Luego el A^* que elige el niño es el mismo que maximiza la suma de los ingresos familiares. Hay que notar que el SPE del juego es:

$$SPE = (A^*, B^*(\cdot, \cdot))$$

Problema 2 Considere el siguiente remate (conocido como "todos pagan"). Cada jugador debe escribir en un sobre lo que está dispuesto a pagar por un objeto. Quien ofrezca más gana, pero todos pagan lo que escribieron. Suponga que hay N jugadores, cada uno de ellos con una valoración v_i del bien, que está distribuída de acuerdo a F en $[0, A]$.

- i. (2 puntos) Escriba este juego en forma bayesiana.
- ii. (3 puntos) Suponga que hay un equilibrio simétrico donde cada jugador elige $\beta(\cdot)$. Escriba la ecuación diferencial que debe satisfacer β .
- iii. (1 punto) Encuentre β .

Respuesta

Para definir el juego en forma bayesiana había que poner las utilidades, y deja en claro que una estrategia en este caso es una función que toma como argumento el tipo del jugador.

Dado esto la utilidad es:

$$U_i(x_i, s_i, s_{-i}) =$$

$$U_i(x_i, s_i, s_{-i}) = \begin{cases} x_i - s_i & \text{si } s_i > s_j, \forall j \\ -s_i & \text{si } \exists j, s_i < s_j \\ \frac{x_i}{m} - s_i & \text{si hay empate, con } m \text{ la cantidad de empatados} \end{cases}$$

Luego, la esperanza de la utilidad, dado el tipo del jugador i es:

$$(U_i(x_i, s_i, s_{-i})|x_i) = x_i \mathbb{P}(s_i > s_j, \forall j) - s_i$$

Que es lo que busca maximizar cada jugador en un equilibrio de Nash.

Ahora, si el jugador supone que todos van a jugar una estrategia del tipo $\beta(x_j)$, la esperanza cambia a:

$$(U_i(x_i, s_i, s_{-i})|x_i) = x_i \mathbb{P}(s_i > \beta(x_j), \forall j) - s_i$$

Ocupando independencia, asumiendo que β es creciente, queda que la probabilidad es:

$$\mathbb{P}(s_i > \beta(x_j), \forall j) = \mathbb{P}^{n-1}(x_j < \beta^{-1}(s_i)) = F^{n-1}(\beta^{-1}(s_i))$$

Entonces, los jugadores van a maximizar $x_i F^{n-1}(\beta^{-1}(s_i)) - s_i$, en s_i . La CPO queda:

$$x_i(n-1)F^{n-2}(\beta^{-1}(s_i))f(\beta^{-1}(s_i))\frac{1}{\beta'(\beta^{-1}(s_i))} - 1 = 0$$

Para que en el equilibrio se cumpla que todos juegan $\beta(\cdot)$ se tiene que cumplir lo anterior reemplazando s_i por $\beta(x_i)$.

$$x_i(n-1)F^{n-2}(x_i)f(x_i)\frac{1}{\beta'(x_i)} - 1 = 0$$

De donde:

$$\beta(x) = \int_0^x y(n-1)F^{n-2}(y)f(y)dy + C$$

Nota: La formula de β asegura que es creciente. Falta el caso en que β es decreciente, pero en la corrección se omitió.

Problema 3 Considere el siguiente juego:

-1,2	2,-1
2,-1	-1,2

i. (4 puntos) Encuentre todos los equilibrios de Nash.

Ahora considere el siguiente juego:

-1,2	2,-1	18,-1.2	3,0.5
2,-1	-1,2	1,1.8	2,-3
1,1.9	-1.1,-0.5	-200,-1	17,1
-5,1.2	1,15	100,12	8,1

ii. (2 puntos) Encuentre todos los equilibrios de Nash.

Respuesta

Es claro que en el primero juego el equilibrio es $\{(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}); (\frac{1}{2}, \frac{1}{2})\}$

Para esto basta ver que si un jugador eso, entonces el otro está indiferente entre jugar cualquiera de sus estrategias.

Para el segundo juego, primero hay que notar que para el jugador 2 las estrategias de la izquierda están estrictamente dominadas, luego el nunca va a jugar esas estrategias. Y dado que no juega, para el jugador 1 las dos últimas estrategias también están estrictamente dominadas. Luego se recupera el juego de la parte anterior, y el equilibrio queda:

$$\{(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0, 0); (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0, 0)\}$$