U N I V E R S I D A D D E C H I L E
Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas
Departamento de Ingeniería Industrial
IN74P 01
Prof: Sergio Lehmann Aux: Claudio Pardo

Auxiliar 4

1. **Call Modelo Binomial**: Suponga que una acción cuyo valor spot es \$36 y su comportamiento se modela considerando u=1.4 y d=0.8 en cada mes. Considere una opción call europea sobre este activo que expira en 2 meses, cuyo precio de ejercicio (precio strike) es \$40.
   a) Si la tasa de interés libre de riesgo es 4%, encuentre el valor de esta opción utilizando un árbol binomial.

   b) Suponga que al cabo de un mes, la tasa de interés libre de riesgo aumenta a 6%. ¿Cómo cambia la valoración de la opción?

2. **Call Black Scholes**: Sea S=60, r=8.62% por año compuesta continuamente, K=65, σ=0.3 (anual), T=6 meses. Calcule el valor de la call por método Black Scholes.

3. **Swap de tasas**: Suponga que dos empresas, Aguas-A y D&S enfrentan los siguientes tipos anuales de interés:

	Aguas-A	D&S
Tipo flotante	LIBOR + 0.5%	LIBOR + 1%
Tipo fijo	11%	12,0%

Ambas empresas necesitan contratar un préstamo por \$5.000.000 por tres años. La empresa Aguas-A necesita un préstamo a interés flotante y la empresa D&S necesita un préstamo a tasa fija. Diseñe un acuerdo swap considerando un intermediador financiero que recibe un 0.10% anual y que beneficie a ambas empresas por igual.

1. Valoración de Opciones (Modelo binomial)

Podemos valorar opciones al crear opciones sintéticas por medio de portafolios réplica. Un portafolio réplica del valor de una opción consistirá en una posición (larga o corta) en la acción y un préstamo (deuda) que será ajustado en cada estado de la naturaleza. La idea es construir el portafolio de tal forma que su valor replique exactamente el de la opción en cada instante del tiempo.

El portafolio réplica es calculado en un mundo en el cual el precio del activo subyacente sube o baja en determinadas proporciones, partiendo de un determinado punto. La fórmula de Black-Scholes (1973) para valorar opciones europeas se puede derivar con un modelo binomial, el que se presenta a continuación:

Black–Scholes call option formula. *For a European call option with strike price K, expiration time T and a constant continuously compounded interest rate r the Black–Scholes solution is $f(S,t) = C(S,t)$ as defined by*

$$C(S,t) = SN(d_1) - Ke^{-r(T-t)}N(d_2) \tag{13.15}$$

where

$$d_1 = \frac{\ln(S/K) + (r + \sigma^2/2)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}$$

$$d_2 = \frac{\ln(S/K) + (r - \sigma^2/2)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}} = d_1 - \sigma\sqrt{T-t},$$

Parámetros a utilizar:

μ = 1 + tasa de retorno si el precio de la acción sube (siempre >1)

δ = 1 + tasa de retorno sí el precio de la acción baja (siempre <1)

r_f^* = 1 + tasa de interés para prestar y pedir prestado (r_f)

Tal que: $\delta < r_f^* < \mu$

K = Precio de ejercicio de la opción o Strike

S = precio spot del activo subyacente

El movimiento del precio de la acción esta dado por:

$S \longrightarrow \mu S = S_\mu$ Con probabilidad q

$\longrightarrow \delta S = S_\delta$ Con probabilidad $1-q$

El precio de la opción de compra (call) a la fecha de vencimiento viene dado por:

$C \longrightarrow C_\mu = MAX(0, S_\mu - K)$

$\longrightarrow C_\delta = MAX(0, S_d - K)$

Utilizando la condición que el portafolio réplica vale lo mismo que la opción en cada estado de la naturaleza. Supongamos un portafolio compuesto por Δ acciones (cantidad) del activo subyacente y un préstamo de $L a la tasa libre de riesgo r_f para replicar el valor de la call. Entonces:

$$C = \Delta S - L \longrightarrow C_\mu = \Delta S_\mu - r_f^* L \qquad (1)$$

$$\longrightarrow C_\delta = \Delta S_\delta - r_f^* L \qquad (2)$$

$$\Delta \mu S - r_f^* L - \Delta \delta S + r_f^* L = C_\mu - C_\delta \quad \rightarrow \quad \Delta(S[\mu - \delta]) = C_\mu - C_\delta \qquad (3) = (1)\text{-}(2)$$

$$\boxed{\Delta = \frac{C_\mu - C_\delta}{(S[\mu - \delta])}} \qquad (4)$$

Reemplazando (4) en (2)

$$\left(\frac{C_\mu - C_\delta}{(S[\mu - \delta])}\right) S\delta - r_f^* L = C_\delta$$

$$r_f^* L = \left(\frac{C_\mu - C_\delta}{(S[\mu - \delta])}\right) S\delta - C_\delta \quad \rightarrow \quad r_f^* L = \left(\frac{C_\mu - C_\delta}{([\mu - \delta])}\right) \delta - C_\delta$$

$$r_f^* L = \frac{(C_\mu - C_\delta)\delta - C_\delta[\mu - \delta]}{[\mu - \delta]} \quad \rightarrow \quad r_f^* L = \frac{\delta C_\mu - \delta C_\delta - \mu C_\delta + \delta C_\delta}{[\mu - \delta]}$$

$$r_f^* L = \frac{\delta C_\mu - \mu C_\delta}{[\mu - \delta]} \quad \rightarrow \quad \boxed{L = \frac{\delta C_\mu - \mu C_\delta}{r_f^*[\mu - \delta]}}$$

Valorando la opción de compra call como una función de S, μ, δ y r_f, la cual obtendremos vía arbitraje. Esta valoración es independiente de las preferencias por riesgo de los inversionistas. Ahora se procederá a valorar este instrumento financiero en un mundo neutral al riesgo ficticio en el cual todos los inversionistas son neutrales al riesgo. En este mundo los inversionistas no demandan premio por riesgo y por lo tanto todos los activos tienen un retorno igual a la tasa libre de riesgo.

Tenemos que:

$$C = \Delta S - L \qquad \Delta = \frac{C_\mu - C_\delta}{(S[\mu - \delta])} \qquad L = \frac{\delta C_\mu - \mu C_\delta}{r_f^*[\mu - \delta]}$$

$$C = \left(\frac{C_\mu - C_\delta}{(S[\mu - \delta])}\right) S - \left(\frac{\delta C_\mu - \mu C_\delta}{r_f^*[\mu - \delta]}\right) \quad \rightarrow \quad C = \left(\frac{C_\mu - C_\delta}{([\mu - \delta])}\right) - \left(\frac{\delta C_\mu - \mu C_\delta}{r_f^*[\mu - \delta]}\right)$$

$$C = \frac{r_f^*(C_\mu - C_\delta) - (\delta C_\mu - \mu C_\delta)}{r_f^*[\mu - \delta]} \quad \rightarrow \quad C = \frac{r_f^* C_\mu - r_f^* C_\delta - \delta C_\mu + \mu C_\delta}{r_f^*[\mu - \delta]}$$

$$C = \frac{C_\mu(r_f^* - \delta) - C_\delta(r_f^* - \mu)}{r_f^*[\mu - \delta]} \quad \rightarrow \quad C = \frac{C_\mu(r_f^* - \delta) + C_\delta(\mu - r_f^*)}{r_f^*[\mu - \delta]}$$

$$C = \frac{C_\mu}{r_f^*}\frac{(r_f^* - \delta)}{[\mu - \delta]} + \frac{C_\delta}{r_f^*}\frac{(\mu - r_f^*)}{[\mu - \delta]} \quad \rightarrow \quad C = VP(C_\mu)\frac{(r_f^* - \delta)}{[\mu - \delta]} + VP(C_\delta)\frac{(\mu - r_f^*)}{[\mu - \delta]}$$

$C = VP(C_\mu)q + VP(C_\delta)(1-q)$: Valor esperado del pago de la opción call con probabilidad q.

Finalmente

$$q = \frac{(r_f^* - \delta)}{[\mu - \delta]} \qquad \text{y} \qquad (1-q) = \frac{(\mu - r_f^*)}{[\mu - \delta]}$$

Suponga que una acción cuyo valor spot es $36 y su comportamiento se modela considerando u=1.4 y d=0.8 en cada mes. Considere una opción call europea sobre este activo que expira en 2 meses, cuyo precio de ejercicio (precio strike) es $40.

a) Si la tasa de interés libre de riesgo es 4%, encuentre el valor de esta opción utilizando un árbol binomial.
b) Suponga que al cabo de un mes, la tasa de interés libre de riesgo aumenta a 6%. ¿Cómo cambia la valoración de la opción?

Solución

a) Los parámetros del modelo son u=1,4, d=0,8, r*=1,04. Por lo tanto, de la definición de probabilidades en mundo neutral al riesgo, tenemos:

$$p \equiv \frac{r^* - d}{u - d}, (1-p) \equiv \frac{u - r^*}{u - d}.$$

Obtenemos que p=40% → (1-p) = 60%

t=0	t=1	t=2	t=0	t=1	t=2
		Suu= 70,56			Cuu=30,56
	Su= 50,4			Cu	
S=36		Sud= 40,32	C= ?		Cud= 0,32
	Sd=28,8			Cd	
		Sdd= 23,04			Cdd= 0

$$C_u = \frac{pC_{uu} + (1-p)C_{ud}}{r^*},$$

Cu = 11,9
Cd = 0,12

$$C_d = \frac{pC_{ud} + (1-p)C_{dd}}{r^*}.$$

$$C = \frac{p^2 C_{uu} + 2p(1-p)C_{ud} + (1-p)^2 C_{dd}}{r^{*2}}.$$

C = 4,6

b) Ahora, desde **el segundo período**: r*=1.06 → Obtenemos que p=43% → (1-p) = 57%

$$C_u = \frac{pC_{uu} + (1-p)C_{ud}}{r^*},$$

$$C_d = \frac{pC_{ud} + (1-p)C_{dd}}{r^*}.$$

Cu = 12,57
Cd = 0,15

C = (40% * 12,57 + 60% * 0.15) / 1.04 = 4,9

2. FORMULA BLACK SCHOLES

En esta sección veremos la célebre fórmula de Black y Scholes (1973) para la valoración de una call europea. a derivación de dicha fórmula se basa en los siguientes supuestos:

a. Los mercados financieros no tienen fricciones, esto es:
   (i) No hay impuestos o costos de transacción.
   (ii) Todos los activos son perfectamente divisibles.
   (iii) No hay restricciones a las ventas cortas de activos.
b. Las tasas de interés para prestar y pedir prestado son iguales y constantes entre t=0 (hoy) y T (fecha de vencimiento del activo). Asumiremos que la tasa de interés por período, r, es compuesta continuamente, de modo tal que un bono libre de riesgo, sin cupones, que paga un $1 en t2 vale B=exp[–r(t2-t1)] en t1.
c. La acción (activo subyacente), no paga dividendos entre 0 y T.
d. El precio de la acción se distribuye lognormal. Esto es:

$$\ln\left(\frac{S_{t2}}{S_{t1}}\right) \rightarrow N\left(\mu\{t2-t1\},\ \ \sigma^2\{t2-t1\}\right)$$

Bajo estos supuestos, el precio de una call europea en una acción está dada por:

Black–Scholes call option formula. *For a European call option with strike price K, expiration time T and a constant continuously compounded interest rate r the Black–Scholes solution is $f(S,t) = C(S,t)$ as defined by*

$$C(S,t) = SN(d_1) - Ke^{-r(T-t)}N(d_2) \qquad (13.15)$$

where

$$d_1 = \frac{\ln(S/K) + (r+\sigma^2/2)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}$$

$$d_2 = \frac{\ln(S/K) + (r-\sigma^2/2)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}} = d_1 - \sigma\sqrt{T-t}\,,$$

Ejemplo

Sea S=60, r=8.62% por año compuesta continuamente, K=65, σ=0.3 (anual), T=6 meses.

Por lo tanto,

$$\sigma\sqrt{T} = 0{,}3\sqrt{0.5} = 0{,}21213$$

$$K \times e^{-rT} = 65 \times e^{-8{,}62\% \times 0.5} = 62{,}258$$

$$d_1 = \frac{\ln(S/K) + (r+\sigma^2/2)(T)}{\sigma\sqrt{T}} = \frac{\ln(60/65) + (8{,}62\% + 0.3^2/2)(0.5)}{0.21213} = -\ 0{,}068$$

$$d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{T} = -\ 0.28013$$

Para evaluar N(d1) y N(d2), hacemos uso de la tabla de valores de la f.d.a de una normal estándar.
Se tiene que N(- 0.068) = 1- N(0.068) = 1 – 0.5271 = 0.473 = 47,3%
Se tiene que N(- 0.28013) = 1- N(0.2813) = 1 – 0.6108 = 0.39 = 39%

Por lo tanto,

$$C = S \times N(d_1) - K \times e^{-rt} \times N(d_2)$$

$$C = 60 \times 47{,}3\% - 62.26 \times 39\%$$

C= 4.11

3. Swap

Suponga que dos empresas, Aguas-A y D&S enfrentan los siguientes tipos anuales de interés:

	Aguas-A	D&S
Tipo flotante	LIBOR + 0.5%	LIBOR + 1%
Tipo fijo	11%	12,0%

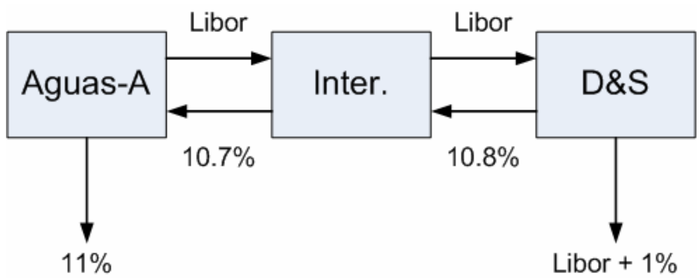
Ambas empresas necesitan contratar un préstamo por $5.000.000 por tres años. La empresa Aguas-A necesita un préstamo a interés flotante y la empresa D&S necesita un préstamo a tasa fija. Diseñe un acuerdo swap considerando un intermediador financiero que recibe un 0.10% anual y que beneficie a ambas empresas por igual.

	Aguas-A	D&S	$\Delta\lambda$
Tipo flotante	LIBOR + 0.5%	LIBOR + 1%	0.5%
Tipo fijo	11%	12,0%	1.0%
	Diferencia de Spread relativos		0.5%

Como existe una diferencia entre los spread relativos, entonces existe la posibilidad de realizar un swap, donde los participantes se repartirán esta diferencia.

$$\Delta\lambda = 0.5 \begin{cases} 0.1 & \text{Intermediador} \\ 0.2 & \text{Aguas-A} \\ 0.2 & \text{D\&S} \end{cases}$$

En base a ello se diseñó la siguiente estructura de swap.



Finalmente se obtiene que tanto Aguas-A como D&S obtuvieron el tipo de tasa deseada con una mejora de 0.2% cada uno.

El intermediario por otro lado obtiene un beneficio neto del 0.1%.

$$Aguas - A = 11\% + Libor - 10.7\% = Libor + 0.3\%$$
$$D\&S = Libor + 1\% + 10.8\% - Libor = 11.8\%$$
$$Intermediario = Libor + 10.8\% - Libor - 10.7\% = 0.1\%$$

Tanto para Aguas-A como para D&S, el acuerdo swap significó una mejora del 0.2% anual.